

Poděkování

V první řadě bych chtěla poděkovat vedoucí mé bakalářské práce RNDR. Aleně Kopáčkové, Ph.D. za možnost zpracovat tak zajímavé téma, jakým zlatý řez bezpochyby je, a také za cenné rady a připomínky ohledně formy a obsahu práce.

Největší dík však patří mé rodině a přátelům, kteří mě podporovali během celého studia a psaní této práce. Jmenovitě bych ráda poděkovala Lukáši Eršilovi, který mi pomohl se sháněním odborné literatury, a zejména mému bratrovi Ing. Janu Novákovi za velkou trpělivost a pomoc při úpravě formálního vzhledu bakalářské práce.

Anotace:

Titul: *Fibonacciho posloupnost a zlatý řez*

Hlavním cílem této bakalářské práce je přiblížit problematiku zlatého řezu v souvislosti s Fibonacciho posloupností a ukázat výskyt tohoto jevu v různých oblastech. Vzhledem k tomu, že toto téma bylo zpracováno v různých souvislostech mnoha autory, uvádíme na začátku této práce přehled vybraných literárních rešerší. Následující část textu je věnována matematické podstatě zlatého řezu včetně jeho historického kontextu. Najdeme zde elementární vlastnosti zlatého čísla a jeho souvislost s útvary rovinné geometrie a platónskými tělesy. Zmíněny jsou i algoritmy výpočtu zlatého čísla a konstrukce zlatého řezu. Samostatná kapitola je věnována Fibonacciho posloupnosti a základním vlastnostem jejích členů, tzv. Fibonacciho čísel, které mají ke zlatému řezu velmi blízký vztah. V neposlední řadě se text dotýká nejrozličnějších oblastí přírody a uměleckých směrů, ve kterých lze Fibonacciho posloupnost a zlatý řez nalézt.

Klíčová slova: Zlatý řez, zlaté číslo, Fibonacciho posloupnost, Fibonacciho čísla, platónská tělesa.

Summary:

Title: *Fibonacci sequence and the Golden Section*

The main aim of this bachelor thesis is to approach the topic of the Golden Section in relation to Fibonacci Sequence and to demonstrate its presence in different fields. Since the topic has already been interpreted in various areas by many authors, we provide an overview of the existing literature at the beginning of the thesis. The following part of the text is devoted to mathematical principles of the Golden Section in its historical context. There we describe the elementary characteristics of the Golden Number and its connection to figures of plane geometry and Platonic solids. Self-contained chapter is dedicated to Fibonacci Sequence and the fundamental properties of its members, the so-called Fibonacci Numbers, that are closely related to the Golden Section. Last but not least, the thesis reveals numerous forms of nature and various kinds of art, where the Fibonacci Sequence and the Golden Section can be found.

Key words: Golden Section, Golden Number, Fibonacci Sequence, Fibonacci Numbers, Platonic solids.

Zusammenfassung:

Titel: *Die Fibonacci-Folge und der goldene Schnitt*

Das Hauptziel dieser Bakkalaureats-Arbeit ist die Erläuterung der Problemstellung des Goldenen Schnitts im Kontext der Fibonacci-Folge und das Aufzeigen dieses Phänomens in verschiedenen Gebieten. Da dieses Thema bereits von vielen Autoren in unterschiedlichen Zusammenhängen untersucht wurde, geben wir zuerst einen Überblick ausgewählter Arbeiten. Der anschließende Teil des Texts widmet sich dem mathematischen Prinzip und dem historischen Kontext des Goldenen Schnitts. Hier untersuchen wir die grundlegenden Eigenschaften der Goldenen Zahl und ihren Zusammenhang mit Konstrukten der ebenen Geometrie und platonischen Körpern. Es werden auch Algorithmen zur Berechnung der Goldenen Zahl und der Konstruktion des Goldenen Schnitts aufgeführt. Ein eigenes Kapitel widmet sich zudem der Fibonacci-Folge und den grundlegenden Eigenschaften ihrer Glieder, den sogenannten Fibonacci-Zahlen, welche eine sehr enge Beziehung zum Goldenen Schnitt aufweisen. Nicht zuletzt geht die Arbeit auf verschiedenste Gebiete der Natur und Kunst ein, in welchen man die Fibonacci-Folge und den Goldenen Schnitt identifizieren kann.

Schlüsselwörter: Goldener Schnitt, Goldene Zahl, Fibonacci-Folge, Fibonacci-Zahlen, Platonische Körper.

Obsah

Obsah	7
Seznam použitých symbolů	9
1 Úvod	10
2 Vybrané bibliografické rešerše	12
3 Pojem zlatý řez	17
3.1 Historie zlatého řezu	18
3.2 Rovinná geometrie zlatého řezu	19
3.2.1 Zlatý obdélník	21
3.2.2 Zlatý trojúhelník	22
3.2.3 Zlatá spirála	24
3.2.4 Pravidelný pětiúhelník	24
3.3 Vlastnosti zlatého čísla	27
3.3.1 Mocniny zlatého čísla	27
3.3.2 Odmocnina	28
3.3.3 Řetězový zlomek	28
4 Platónská tělesa	29
4.1 Dualita	30
4.2 Zlatý řez v platónských tělesech	31
5 Fibonacci	32
5.1 Fibonacciho posloupnost	32
5.2 Fibonacciho čísla	34
5.2.1 Základní vlastnosti	34

5.2.2	Fibonacciho čísla v Pascalově trojúhelníku	38
5.3	Souvislost Fibonacciho čísel se zlatým řezem	39
6	Zlatý řez v přírodě	41
6.1	Rostliny	41
6.1.1	Fylotaxe	41
6.1.2	Druhotné spirály	42
6.1.3	Květy a Fibonacciho čísla	43
6.2	Živočichové	44
6.2.1	Lidské tělo	45
6.2.2	Logaritmická spirála v přírodě	46
6.3	Fraktály	47
6.3.1	Výpočet fraktální dimenze	47
6.3.2	Výběr faktoru změny délky	48
7	Zlatý řez v umění	51
7.1	Architektura	51
7.1.1	Románská měřidla	51
7.1.2	Le Corbusier	53
7.2	Malířství	55
7.2.1	Kompozice	55
7.2.2	Významní umělci a jejich díla	56
7.3	Hudba	58
7.4	Grafické umění	59
8	Závěr	61

Seznam použitých symbolů

\in	náleží, je prvkem
\leftrightarrow	přímka
\cap	průnik
\perp	kolmost
$<>$	větší, menší
$ AB $	velikost úsečky AB
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r

Kapitola 1

Úvod

S čísly se setkáváme denně na každém kroku. Jejich prostřednictvím víme, kolik je právě hodin, jaké množství peněz máme v peněženke nebo kolik minut nám zbývá do sjednané schůzky. Většina čísel není nijak zvláštních, některá se však vyskytují v určitých matematických zákonitostech, a mají proto v určité oblasti zásadní význam. Těmto číslům bylo přiřazeno symbolické označení a také název, který byl mnohdy odvozen od jmen jejich objevitelů. Mezi nejznámější patří Eulerovo číslo e tvořící základ přirozených logaritmů a Ludolfovo číslo π , které známe například ze vzorce pro výpočet obvodu kružnice. Méně známé, avšak minimálně stejně zajímavé číslo se skrývá pod označením φ .

Řecké písmeno φ (fi) označuje specifický poměr mezi celkem a jeho částmi známý jako zlatý řez. Zlatý řez je definován pomocí úsečky rozdělené na větší a menší část tak, že poměr celé úsečky ku větší části je stejný jako poměr větší části ku menší. Historie zlatého řezu sahá až do starověkého Řecka, kde bylo číslo φ považováno za ztělesnění harmonie a krásy. Mnoho antických umělců prý údajně zlatý řez používalo. Tuto domněnku podporuje i samotné symbolické označení, neboť písmeno fi bylo odvozeno ze jména řeckého sochaře Feidia, autora soch zdobících prostory Parthenónu. Zlaté číslo disponuje řadou nevšedních vlastností, tou nejzajímavější je bezesporu jeho výskyt v různorodých oblastech, se kterými matematika nemá zdánlivě nic společného.

V následujícím textu rozčleněném do osmi kapitol si toto záhadné číslo představíme blíže. Nejdříve se seznámíme s jeho historickými souvislostmi, uvedeme základní matematické vztahy a rovinné útvary, v nichž se zlatý řez vyskytuje. Dále si ukážeme souvislost zlatého řezu s členy Fibonacciho posloupnosti, tzv. Fibonacciho čísla, které mají obrovské význam v rostlinné a živočišné říši. Nevynecháme ani platónská tělesa, jediné konvexní mnohostěny, jejichž všechny úhly jsou shodné a strany totožné. Hlavní pozornost však bude věnována výskytu zlatého řezu

v umění a přírodě. Vysvětlíme si, jak se objevuje číslo φ v systému stavby schránek některých měkkýšů, postavení listů na rostlině nebo ve způsobu umístění semínek slunečnice. Seznámíme se také s obrazy známých malířů i hudebními díly světových skladatelů. Na závěr uvedeme praktické využití zlatého řezu při správném komponování fotografie.

Kapitola 2

Vybrané bibliografické řešerše

V této kapitole se seznámíme s nejdůležitějšími literárními zdroji z různých oblastí, které se věnují tématu zlatého řezu a Fibonacciho posloupnosti.

Bangs H.: Návrat posvátné architektury: zlatý řez a konec modernismu [2]

Ve své publikaci se autor snaží poukázat na stále rostoucí odcizování architektury a zároveň hledá způsob, jak tento trend zvrátit. Východisko nachází v návratu k tradicím – ve využívání postupů a metod posvátné geometrie a hledání krásna. Jako jeden z hlavních aspektů posvátné geometrie zmiňuje Bangs poměr zlatého řezu a jeho konkrétní využití v architektuře jak v minulosti, tak v současnosti. Zlatý řez je zde znázorněn pomocí úsečky rozdělené na větší část a a menší část b v poměru $a / b = (a + b) / a = 1,618\dots$, neboli číslo φ . Bangs poukazuje na tvary a představy známé již ve starověku, které se objevují v dílech moderních architektů. Jako příklad je uveden Ieoh Ming Pei, tvůrce skleněné pyramidy na nádvoří Louvru.

Bečvář J.: Matematika ve středověké Evropě [4]

Publikace J. Bečváře představuje matematiku z historického pohledu a soustředí se zejména na její vývoj na našem kontinentu. Jedna z kapitol je věnována Leonardovi Pisánskému zvanému Fibonacci. V této kapitole je uveden Fibonacciho životopis a podrobný popis jeho tří hlavních matematických děl, která měla pro tehdejší Evropu obrovský význam. Nechybí zde ani Fibonacciho úloha o králících, doprovázená přehlednou tabulkou a vzorcem pro výpočet Fibonacciho posloupnosti.

Beutelspacher A.: Matematika do vesty [3]

Tato útlá publikace je stručným shrnutím nejzajímavějších témat z různých oborů matematiky. Díky své nenáročné formě je určena především pro laickou veřejnost, můžeme ji proto najít i v dětských odděleních knihoven. Zlatý řez je zde popsán jako poměr, ve kterém jsou velikost celé úsečky ku větší části a zároveň větší část úsečky ku menší části. Přesný výpočet poměru je dán rovnicí $(1 + \sqrt{5}) / 2 = 1,618...$ Dále se můžeme dočíst o historii zlatého řezu a jeho mnohostranném využití zejména v umění a architektuře a také o jeho výskytu v lidských proporcích.

Crhák F.; Kostka Z.: Výtvarná geometrie [6]

Poslední kapitola uvedené publikace se zabývá proporcemi a jejich výtvarnými vztahy. Problematika zlatého řezu je zde nastíněna jen velmi stručně pomocí číselného vyjádření a několika základních konstrukcí. Hlavní pozornost je věnována využití zlatého řezu u poměrového systému zvaného modulator architekta Le Corbusiera, jehož podstata je založena na proporcích lidské postavy.

Hron J.: Jak namalovat krajinu [7]

Publikace „Jak namalovat krajinu“ je vhodnou příručkou pro začínající malíře věnující se tématu krajinomalby. Autor zde představuje jednotlivé techniky malby a poukazuje na zásady, které se odrážejí v dílech světoznámých malířů. Téma zlatého řezu můžeme najít v kapitole „Kompozice“, ve které je ukázána jednoduchá konstrukce zlatého řezu a jeho znázornění pomocí úsečky rozdělené na větší část m a menší část n , zlatý řez je určen poměrem $n : m = m : (m+n)$. Autor uvádí, že pro malíře není nutné znát přesné číselné vyjádření tohoto poměru, ale co nejvíce se mu přiblížit pouhým odhadem. V závěru kapitoly jsou uvedeny a rozebrány konkrétní příklady užití zlatého řezu - Bohumil Kubišta (Žně), Camill Corot (Katedrála v Chartres).

Chmelíková V.: Zlatý řez nejen v matematice [5]

Jedna z nejnovějších publikací věnujících se zlatému řezu se skládá z deseti kapitol, ve kterých je toto téma zkoumáno z různých úhlů. Hlavním rysem publikace je její matematické zaměření. Můžeme se zde dočíst o vlastnostech zlatého čísla, jeho výpočtu a výskytu v různých podobách. Autorka uvádí také mnoho konstrukcí zlatého řezu i dalších útvarů (zlatý obdélník, pětiúhelník). Každá tato konstrukce je doplněna symbolickým zápisem a důkazem. Zajímavostí této publikace je kapitola o zlatém řezu v hodinách matematiky na středních školách, jež jsem nenalezla

v žádné jiné literatuře. V této kapitole autorka srovnává učebnice před 2. světovou válkou a po ní s učebnicemi současnými a zároveň uvádí kdy, jak a proč zlatý řez na středních školách učit.

Juškevič A. P.: Dějiny matematiky ve středověku [11]

V této publikaci je uveden životopis Leonarda Pisánského, zvaného Fibonacci a jeho nejvýznamnější díla z oblasti matematiky. Autor zde uvádí Fibonacciho posloupnost vyjádřenou součtem řady $1 + 2 + 3 + 5 + \dots$, kde každý člen posloupnosti je součtem dvou předcházejících (kromě prvních 2 členů), vyjádřeno rovnicí $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Posloupnost je vyložena pomocí úlohy o králících.

Kowal S.: Matematika pro volné chvíle: (zábavou k vědě) [14]

Publikace „Matematika pro volné chvíle“ seznamuje čtenáře vtipnou a zábavnou formou s mnoha objevy z historie matematiky, a zároveň s řadou zajímavostí z elementární a částečně i vyšší matematiky. Poměr zvaný φ je zde definován pomocí dělení úsečky a , tedy stejným způsobem, jakým ho uvádějí i ostatní autoři. O zlatém řezu se zde hovoří jako o božské proporci užívané již ve starověkém Řecku, znovu objeveném v renesanci a hojně používaném i v současnosti. Nalezneme zde stručný popis těles a rovinných obrazců vykazující vlastnosti zlatého řezu (zlatý trojúhelník, zlatý obdélník, logaritmická spirála apod.). Dále autor uvádí Fibonacciho posloupnost a její souvislost s číslem φ . Na závěr kapitoly je čtenáři předloženo několik zábavných úloh k řešení.

Livio M.: Zlatý řez [15]

M. Livio, rumunský astrofyzik, je autorem publikace, která se celým svým obsahem věnuje tématu zlatého řezu a jeho výskytu v rozličných jevech. V publikaci „Zlatý řez“ se dovídáme o dějinách zlatého poměru, jeho chápání u Pythagorejců a Eukleida a jeho geometrickým a číselným vyjádřením. Je zde uvedena souvislost Fibonacciho posloupnosti a zlatého čísla. Autor se snaží poukázat na nesčetný výskyt zlatého řezu nejenom v matematice, ale především v dalších oborech, jako je například architektura, malířství nebo hudba. Nezapomíná ani na skutečnost, že zlatým řezem disponuje příroda v podobě schránek hlavonožců, postavení listů na rostlině a nebo ve výstavbě lidského těla. Livio se zde zmiňuje dokonce i o souvislosti mezi zlatým řezem a chováním burzy, neboť výchylky trhu lze podle teorie Ralphi Nelsona Elliota zobrazit jako Fibonacciho čísla. Hlavním rysem publikace je však její negativní postoj k přeceňování výskytu zlatého řezu. Mnohá tvrzení o přítomnosti zlatého řezu například ve stavbě Parthenónu nebo

v dílech známých umělců pokládá za nepodložené spekulace a pouhé žonglování s čísly.

Olsen S.: Záhadný zlatý řez [17]

Zlatý řez se objevuje v mnoha podobách přírody a právě na tento fakt se zaměřuje publikace Scotta Olsena. Autor se soustředí na význam zlatého řezu v souvislosti s jeho výskytem v přírodních jevech - od živočichů, rostlin, poměrů lidského těla až po pohyb planet sluneční soustavy. Do pozadí je naopak odsunuta matematická stránka zlatého řezu. Publikace je téměř na každé druhé straně doplněna ilustrací usnadňující pochopení daného tématu, je tedy vhodná pro širší veřejnost, která se chce dozvědět o zlatém řezu z hlediska jeho uplatnění v přírodě.

Opava Z.: Matematika kolem nás [18]

Publikace Zdeňka Opavy „Matematika kolem nás“ je psána velmi stručně. Přesné definice jsou zjednodušeny a upraveny tak, aby kniha byla zajímavá a pochopitelná i pro čtenáře bez hlubších matematických znalostí. V jedné z kapitol je uvedena úloha o králících, na níž je vysvětlena Fibonacciho posloupnost a vztah jejích členů, tzv. Fibonacciho čísel k postavení listů na rostlině. Téma zlatého řezu je uvedeno úlohou, kde je čtenář vyzván, aby z deseti nabízených pravoúhelníků vybral ten, který se mu nejvíce líbí. Výsledkem by měl být pravoúhelník o rozměrech zlatého řezu. V neposlední řadě zde najdeme i základní konstrukci a definici zlatého řezu pomocí dělené úsečky. Autor se stručně zmiňuje také o historii zlatého řezu a jeho uplatnění například při tvorbě nábytku.

Vincent R.: Geometry of the golden section [21]

Anglický překlad francouzského originálu „Géométrie du nombre d'or“ od A. Mequina se soustředí výhradně na geometrickou oblast zlatého řezu, který je zde označen řeckým písmenem ϕ . V úvodu nalezneme stručné matematické vyjádření zlatého řezu a několik slov o jeho historii a výskytu v přírodě či umění. Převážná část „Geometry of the golden section“ je však věnována konstrukci různých útvarů, které souvisí se zlatým řezem. Všechny konstrukce jsou doplněny podrobným popisem jednotlivých kroků tak, aby bylo jasné, jak daný obrazec sestavit.

Vorobjev N. N.: Fibonacciova čísla [22]

Útlá publikace N. N. Vorobjeva slouží k výkladu teorie Fibonacciho čísel a jejich vlastností. Úvodem je vyložena známá úloha o králících, následuje vysvětlení základních a číselně teoretických vlastností Fibonacciho čísel a jejich souvislost s řetězovými zlomky. Poslední kapitola

je věnována geometrii a zlatému řezu.

Walser H.: The Golden Section [23]

Publikace „The Golden Section“ je anglickým překladem německého originálu „Der Goldene Schnitt“. Obsah se věnuje zlatému řezu téměř výhradně po matematické stránce. Stejně jako v mnoha jiných publikacích jsou zde uvedeny konstrukce a vlastnosti zlatého čísla, které autor označuje řeckým písmenem τ . V jedné ze sedmi kapitol se můžeme dočíst o fraktálech, jejich vytváření a výskytu. Fraktální geometrie úzce souvisí se zlatým řezem, avšak toto téma se u knih zmíněných v této kapitole téměř nevyskytuje. Podobné tvrzení platí i o skládání papírových proužků umožňující sestavit například pětiúhelník.

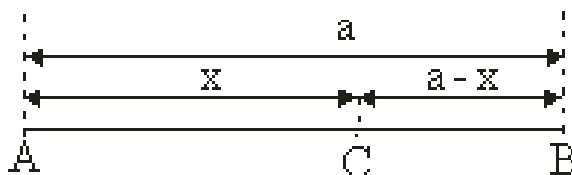
Znám Š. a kol.: Pohľad do dejín matematiky [27]

V této slovenské publikaci, která se věnuje historii matematiky, najdeme i několik slov o Leonardu Pisánském, neboli Leonardu Fibonacci. V publikaci je velmi stručně vylíčen jeho životopis a nejvýznamnější díla („Liber abaci“, „Liber quadratorum“ a „Practica Geometriae“) a jejich přínos v oblasti matematiky. Najdeme zde také Fibonacciho posloupnost a Fibonacciho identitu, které byly pojmenovány na počest svého objevitele.

Kapitola 3

Pojem zlatý řez

Jak uvádí Livio [15], zlatý řez, zlatý poměr, zlaté číslo, ϕ nebo božská proporce jsou vše synonyma označující speciální aritmetický poměr vyskytující se ve zdánlivě nesourodých oblastech. Zdá se téměř nemožné, aby spirálovité skořápky měkkýšů, slavné stavby nebo tvar galaxií měly cokoli společného, opak je však pravdou. A právě zlatý řez je společným článkem všech těchto a dalších jevů. Abychom však mohli pochopit podstatu zlatého řezu, musíme si nejdříve vysvětlit, co to zlatý řez vlastně je a jak ho můžeme získat. Kowal [14] vysvětluje definici zlatého řezu na geometrickém příkladě (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Dělení úsečky v poměru zlatého řezu [8]

Mějme úsečku délky a , kterou rozdělíme na větší část x a menší část $a - x$. Úsečka je rozdělena v poměru zlatého řezu, pokud platí:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a - x)}. \quad (3.1)$$

Vztah následně upravíme na kvadratickou rovnici:

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \quad (3.2)$$

Walser [23] uvádí, že pokud položíme délku úsečky $a = 1$, pak získáme upravenou kvadratickou rovnici ve tvaru

$$x^2 + x - 1 = 0. \quad (3.3)$$

Tato rovnice má 2 řešení:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618, \quad (3.4)$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,618. \quad (3.5)$$

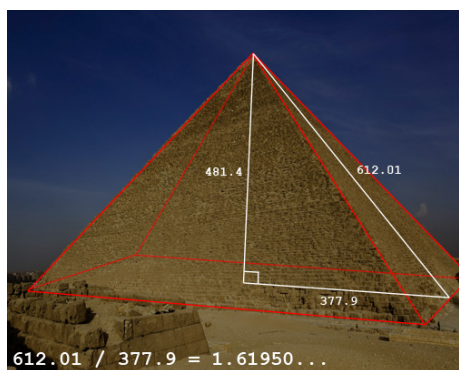
Kořeny rovnice reprezentují délku úsečky x . To znamená, že kořen rovnice musí být kladné číslo. V našem případě je tedy jediným kořenem splňujícím podmínku $x \approx 0,618$. Již víme, že zlatý poměr je definován jako $\varphi = \frac{a}{x}$ a pokud dosadíme za $a = 1$ a za $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, získáme následující rovnost:

$$\varphi = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{5})}{-1+5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398... \quad (3.6)$$

Jak uvádí Vincent [21], toto číslo má mnoho zajímavých vlastností, které u jiných čísel nenajdeme. Například jeho převrácená hodnota je rovna hodnotě φ^2 , pokud od ní odečteme číslo 1 ($\varphi^2 - 1 = \frac{1}{\varphi} = 0,61803398...$). Naproti tomu druhá mocnina φ je opět rovna hodnotě čísla φ , tentokrát však zvětšené o číslo 1 ($\varphi^2 = \varphi + 1 = 2,61803398...$). Podrobněji se problematice vlastností zlatého čísla budeme věnovat později.

3.1 Historie zlatého řezu

Pokud chceme najít počátky zlatého řezu, musíme se vydat až do starověku. Nejstarší civilizací, která zřejmě používala zlatý řez, byli Egypťané. Svědčí o tom Rhindův papyrus, který potvrzuje, že Egypťané znali a používali přibližnou hodnotu čísla π . Nikde však nenajdeme ani zmínku o čísle φ . Tato skutečnost však neznamená, že starověké civilizace zlatý řez s jistotou nepoužívaly.



Obrázek 3.2: Cheopsova pyramida [16]

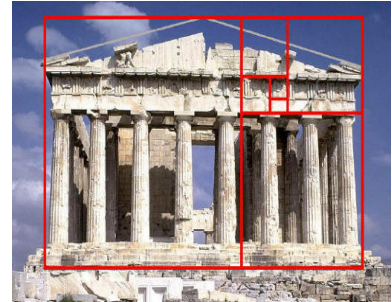
Neslavnějším odkazem Egypťanů v souvislosti se zlatým řezem je Cheopsova pyramida (obr. 3.2), jejíž poměr výšky trojúhelníkové stěny a poloviny strany základny je roven zlatému řezu. Podobným případem je řecký chrám Parthenon v aténské Akropoli (obr. 3.3), do něhož lze vepsat zlatý obdélník, avšak mnozí architekti jsou v tomto pohledu skeptičtí z důvodu částečné odchylky v proporcích chrámu a čísla φ .

Jak se můžeme dočíst v díle M. Livia [15], prvním, kdo jednoznačně definoval tento zlatý řez, byl alexandrijský matematik Eukleides. Ve svém díle „Základy“ zkoumal

souvislost zlatého řezu s platónskými tělesy a ukázal konstrukci pravidelného pětiúhelníku. Eukleides tehdy definoval zlatý řez jako *krajní a střední poměr* (dnešní zlatý řez) následujícím způsobem:

Úsečka se rozdělí v krajním a středním poměru tehdy, když se celá má k delšímu dílu jako delší k menšímu. (Livio, [15, s. 11])

Vincent [21] uvádí, že další osobností zabývající se tímto tématem, byl římský architekt Vitruvius, který vyslovil domněnku, že lidské tělo je vystavěno v proporcích zlatého řezu, a tím by se měli inspirovat architekti při stavbě budov.



Obrázek 3.3: Parthenón [25]

V období renesance byly Eukleidovy poznatky znovu oživeny prostřednictvím františkánského mnicha jménem Luca Pacioli. Jeho kniha „Divina Proportione“ obsahuje shrnuté vlastnosti zlatého řezu, analýzu platónských těles a dalších mnohostěnů. Je opatřena ilustracemi jednoho z největších umělců všech dob, Leonarda da Vinciho, v jehož dílech se zlatý řez údajně také vyskytuje.

Ve 20. století pojmenoval božskou proporci americký matematik Mark Barr písmenem φ (fi) podle počátečního písmene velkého řeckého sochaře, malíře a architekta Feidia, který podle některých teorií ve svých dílech zlatý řez velmi často používal. V tomto období se mnozí umělci začali obracet ve svých dílech zpět k antickým ideálům krásy a harmonie, jejichž zpodobněním byl právě zlatý řez. Mezi nejvýznamější patří například architekt Le Corbusier a jeho známý *modulor*, o kterém se však podrobněji zmíníme v jiné kapitole. V současné době najdeme zlatý řez i v moderní architektuře a umění. Pyramida na nádvoří Louvre a La Géode v Paříži slouží jako neklamný důkaz toho, že zlatý řez byl, je a s největší pravděpodobností i bude pro svou krásu a harmonii neustálou inspirací pro malíře, architekty, designéry a další umělce.

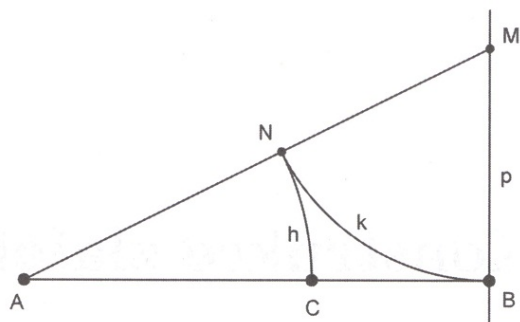
3.2 Rovinná geometrie zlatého řezu

Jak jsme naznačili v úvodu, zlaté číslo můžeme najít v mnoha různých podobách. V následující podkapitole se blíže seznámíme s jeho aplikací v rovinné geometrii, respektive se čtyřmi základními rovinnými mnohoúhelníky, které úzce souvisejí se zlatým řezem. Mezi tyto útvary patří zlatý obdélník, zlatý trojúhelník, zlatá spirála a pravidelný pětiúhelník. Nejdříve si

však ukážeme základní konstrukci zlatého řezu nazývanou *Hérónova konstrukce*¹, jak ji uvádí Chmelíková [5] (obr. 3.4).

Základní konstrukce zlatého řezu (převzato z [5, s. 23, 24])

Je dána libovolná úsečka AB. Rozdělme úsečku bodem C v poměru zlatého řezu tak, aby $|AC| > |BC|$.



Obrázek 3.4: Hérónova konstrukce zlatého řezu [5]

Postup konstrukce:

1. $\leftrightarrow p; p \perp AB, B \in p$,
2. $M; M \in p, |MB| = \frac{1}{2}|AB|$,
3. $k; k(M, |MB|)$,
4. $N; N \in (k \cap AM)$,
5. $h; h(A, |AN|)$,
6. $C; C \in (h \cap AB)$.

DŮKAZ:

Nyní si dokážeme, že hotnota poměrů $|AB| : |AC|$ a $|AC| : |BC|$ je skutečně φ .

Nechť $|AB| = a$, potom:

$$\begin{aligned} |BM| &= \frac{a}{2}, \\ |MN| &= |BM| = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

¹Hérón z Alexandrie byl řeckým matematikem, fyzikem a vynálezcem, který žil v prvním století našeho letopočtu.

$$\begin{aligned}
|AM| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\
|AC| &= |AN| = |AM| - |MN| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Nyní ověříme, že hodnota příslušných poměrů skutečně odpovídá číslu φ :

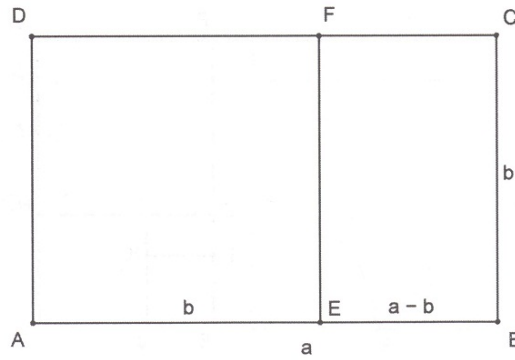
$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

3.2.1 Zlatý obdélník

Zlatým obdélníkem nazveme takový obdélník, jehož strany jsou ve zlatém poměru (obr. 3.5), tedy

$$\frac{a}{b} = \varphi.$$

Tento rovinný útvar můžeme sestavit několika různými způsoby, které uvádí Vincent [21] ve své publikaci *Geometry of the Golden Section*.



Obrázek 3.5: Zlatý obdélník [5]

Zajímavou vlastností zlatého obdélníku je, že když z tohoto obdélníku odřízneme čtverec, vznikne nám nový obdélník, který je podobný původnímu obdélníku. Jinými slovy nám vznikne nový zlatý obdélník. Pokud bychom postup s odřezáváním čtverců opakovali, výsledkem by byli neustále se zmenšující zlaté obdélníky. Z obrázku 3.5 vidíme, že pokud má být obdélník $EBCF$ zlatý, musí platit následující rovnost:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b},$$

tuto rovnici upravíme na tvar

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}.$$

Pokud hledaný poměr $\frac{a}{b}$ označíme jako n , získáme

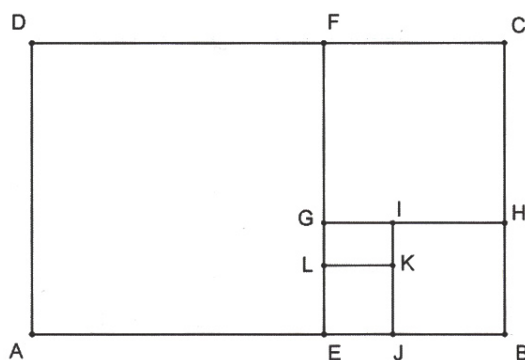
$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= n - 1, \\ 0 &= n^2 - n - 1.\end{aligned}$$

Řešením této rovnice jsou dva kořeny:

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ n_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Hledaný poměr n je podíl dvou kladných čísel, proto nemůžeme použít kořen n_2 , který je záporný. Jediným možným řešením je tedy

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi. \quad (3.7)$$



Obrázek 3.6: Aproximace zlatého obdélníku čtverci [5]

3.2.2 Zlatý trojúhelník

Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trojúhelník, u něhož platí, že strana ku základně se nachází ve zlatém poměru. Ve zlatém trojúhelníku svírají ramena se základnou úhel 72° a úhel u vrcholu odpovídá 36° (obr. 3.7). Tuto skutečnost si můžeme ověřit jednoduchým výpočtem.

Označme ramena trojúhelníku písmenem r a základnu písmenem z .

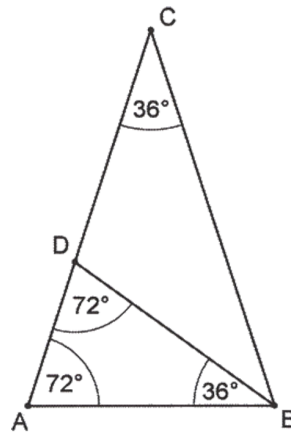
Pak platí, že

$$\frac{r}{z} = \varphi.$$

Velikost úhlu při základně označíme α a pomocí výšky k základně vytvoříme z původního trojúhelníku dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Pro úhel α potom platí, že

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Výpočtem ověříme, že úhel $\alpha = 72^\circ$. Protože je trojúhelník rovnoramenný, musí i druhý úhel při základně odpovídat 72° . Na vrcholový úhel podle pravidla součtu vnitřních úhlů trojúhelníka tedy zbývá 36° . Stejně jako zlatý obdélník můžeme dělit na menší a menší obdélníky, lze podob-



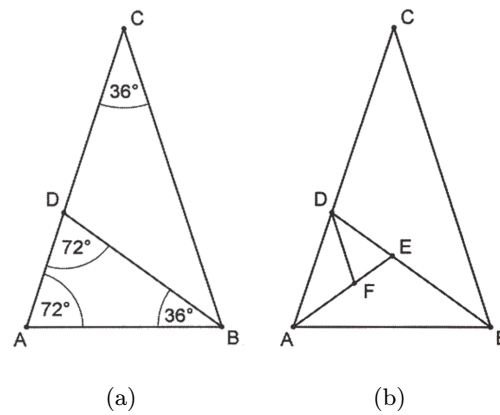
Obrázek 3.7: Zlatý trojúhelník [5]

ným způsobem pracovat i se zlatým trojúhelníkem. Na obrázku 3.8 vidíme trojúhelník ABC , do něhož je vepsán trojúhelník ABD tak, že $|AB| = |BD|$. Úhel u vrcholu A tedy stejně jako u vrcholu D odpovídá 72° . Na třetí úhel u vrcholu B nám tedy zbývá 36° . Ze shodnosti úhlů vyplývá, že trojúhelník ABD je podobný trojúhelníku ABC , jeho ramena jsou tedy ku základně ve zlatém poměru. Postup můžeme opakovat a získávat tak další zlaté trojúhelníky AED , FED ,...

Podívejme se znovu na obrázek 3.8, tentokrát se ale zaměříme na trojúhelník BCD . Jak tvrdí Livio [15], pomocí elementárních znalostí můžeme dokázat, že tento trojúhelník je rovnoramenný a jeho ramena odpovídají základně trojúhelníka ABC . Tento trojúhelník, jehož poměr ramen ku základně je roven obrácenému poměru než je u zlatého trojúhelníka, tedy $\frac{1}{\varphi}$, nazýváme *zlatý gnómon*. Zlaté gnómony se vytvářejí jako doplňky k vpisovaným zlatým trojúhelníkům.

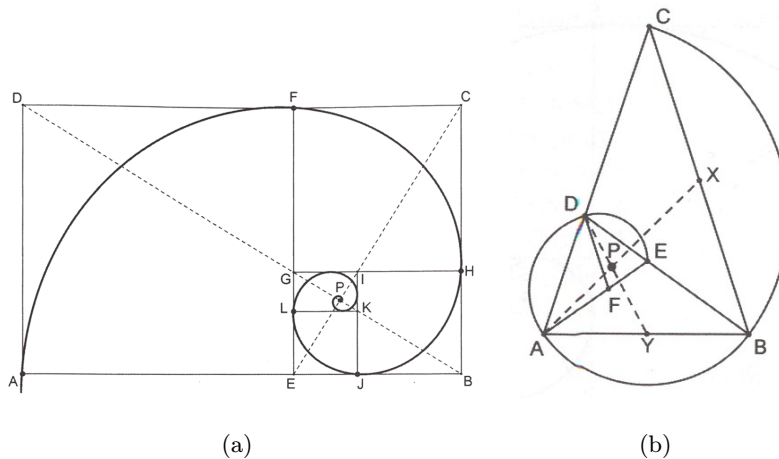
3.2.3 Zlatá spirála

Zlatá spirála, patřící do rodiny logaritmických spirál, se vyznačuje tzv. soběpodobností. Tato vlastnost spočívá v tom, že úhel, který svírá tečna této křivky v jejím libovolném bodě s přímkou



Obrázek 3.8: Proces vpisování zlatých trojúhelníků [5]

spojující tento bod se středem spirály, je stálý. Jinak řečeno, křivka se vzrůstající velikostí nemění svůj tvar. Jak uvádí Chmelíková [5], zlatá spirála úzce souvisí s oběma předcházejícími útvary. Můžeme ji například přibližně sestavit pomocí čtvrtkružnic vepsaných do jednotlivých čtverců vepsaných do zlatého obdélníka, křivka s přitom dotýká bodů A, F, H, J, L, \dots Pól této spirály (obr. 3.9(a)) je bod P , který je průsečíkem spojnic vrcholů BD a EC , jež tvoří úhlopříčky zlatých obdélníků. Logaritmickou spirálou můžeme proložit i vrcholy do sebe vepsaných zlatých trojúhelníků tak, že body C, B, A, D, E, \dots budou ležet na křivce. Její pól najdeme jako průsečík úseček AX a DY , kde $X = \frac{1}{2}BC$ a $Y = \frac{1}{2}AB$ (obr. 3.9(b)).

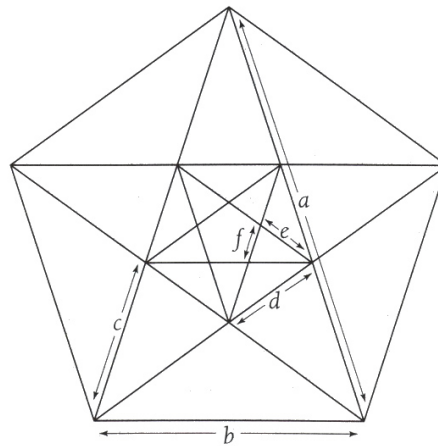


Obrázek 3.9: Zlatá spirála znázorněná pomocí zlatého obdélníku a trojúhelníku [5]

3.2.4 Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný pětiúhelník, často označovaný jako pentagon, je rovinný útvar vyznačující se pěti shodnými stranami a pěti shodnými vnitřními úhly. Jak uvádí Livio [15], s tímto útvarem úzce

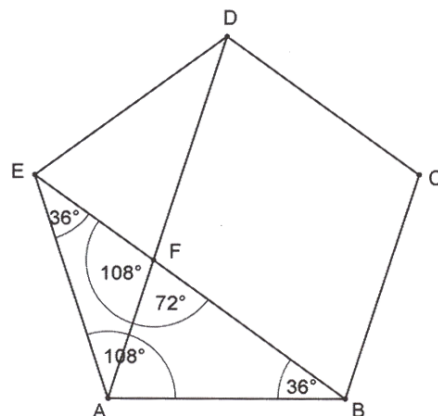
souvisí pentagram - pěticípá hvězda - dávný symbol pythagorejců. Pentagram vznikne, když spojíme všechny vrcholy pětiúhelníka úhlopříčkami, kterých je stejně jako stran, tedy pět. Tyto úhlopříčky nám vytvoří uprostřed nový menší pětiúhelník, který bychom mohli opět proložit úhlopříčkami a získali bychom pětiúhelník, ze kterého bychom opakováním uvedeného postupu získali další pětiúhelníky. Důležitou vlastností je vztah pravidleného pětiúhelníku k zlatému řezu. Jestliže se podíváme na obrázek 3.10 můžeme pomocí elementární geometrie snadno ověřit, že úsečky označené a, b, c, d, e a f jsou ve vztahu $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \varphi$.



Obrázek 3.10: Pentagram v pravidelném pětiúhelníku [15]

V publikaci V. Chmelíkové „Zlatý řez nejen v matematice“ [5] najdeme o pravidelném pětiúhelníku následující dvě tvrzení.

1. *Dvě úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku, které nemají společný koncový bod, se navzájem dělí v poměru zlatého řezu.*



Obrázek 3.11: Půlení úhlopříček pentagonu ve zlatém řezu [5]

DŮKAZ:

Na obrázku 3.11 je znázorněn pětiúhelník $ABCDE$, jeho dvě úhlopříčky AD , BE a jejich průsečík F . Trojúhelník BEA je rovnoramenný se základnou BE . Úhel při vrcholu A je roven 108° , úhly u vrcholů B a E odpovídají polovině z rozdílu $180^\circ - 108^\circ$, tedy 36° . Trojúhelník EAF je také rovnoramenný. Jeho základnou je strana EA . Protože víme, že úhel BEA je shodný s úhlem AEF , který odpovídá úhlu EAF , můžeme určit úhel u vrcholu F v trojúhelníku EAF , který je 108° . Z toho plyne, že trojúhelníky BEA a EAF jsou podobné a že platí:

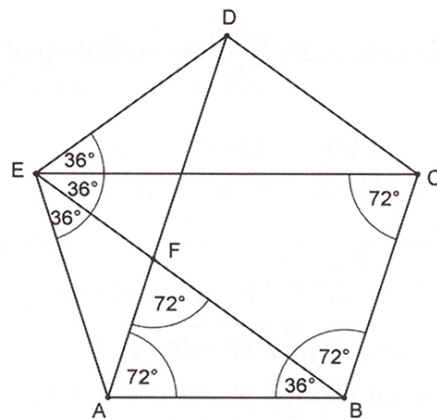
$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|EF|}. \quad (3.8)$$

Dopočítáním úhlů můžeme ukázat, že trojúhelník FAB je také rovnoramenný a jeho základnu tvoří strana AF . Z toho plyne, že $|AB| = |BF| = |AE|$. Když dosadíme do vztahu 3.7, získáme

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{|BF|}{|EF|},$$

což znamená, že bod F dělí úsečku ve zlatém řezu.

2. *Délka strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka se nachází k sobě navzájem ve zlatém poměru.*



Obrázek 3.12: Zlatý poměr úhlopříčky ku straně pentagonu [5]

DŮKAZ:

Na obrázku 3.12 je opět znázorněn pravidelný pětiúhelník. Z předchozího důkazu víme, že úhel $AEB = 36^\circ$. To platí i o úhlu CED . Úhel AED měří 108° . Úhel u vrcholu E rovnoramenného trojúhelníka BCE se základnou BC je tedy 36° a úhly u základny

odpovídají 72° . Trojúhelník BCE je podobný trojúhelníku FAB , proto

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|FA|}. \quad (3.9)$$

Protože

$$\begin{aligned} |BC| &= |AB| = |BF|, \\ |FA| &= |EF|. \end{aligned}$$

Z předchozího důkazu víme, že $\frac{|BF|}{|EF|} = \varphi$. Dosadíme-li do vztahu 3.8, získáme rovnost

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|FA|} = \frac{|BF|}{|EF|} = \varphi.$$

3.3 Vlastnosti zlatého čísla

Zlaté číslo φ má neukončený neperiodický desetinný rozvoj, nelze ho tedy zapsat jako podíl dvou celých čísel. Čísla, která mají tuto vlastnost označujeme jako iracionální. Pojďme se podívat na některé další vlastnosti, které souvisí s φ .

3.3.1 Mocniny zlatého čísla

Již jsme se zmínili, že $\varphi^{-1} = \varphi - 1$ a $\varphi^2 = \varphi + 1$. Oba uvedené vztahy si nyní dokážeme dosazením hodnoty $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ do obou stran rovnice.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{5-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ \varphi - 1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

tedy platí, že

$$\varphi^{-1} = \varphi - 1. \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ \varphi + 1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Dosazením hodnoty φ ve tvaru zlomku jsme opět došli k rovnosti

$$\varphi^2 = \varphi + 1. \quad (3.11)$$

Jak víme z rovnice 3.10, můžeme výraz φ^2 nahradit lineárním výrazem $(\varphi + 1)$, a tím snadno dopočítat další mocniny, jak je uvádí Walser [23]:

$$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (\varphi + 1) \cdot \varphi = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1. \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= 1, \\
\varphi^1 &= \varphi, \\
\varphi^2 &= \varphi + 1 = \varphi + 1, \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1, \\
\varphi^4 &= \varphi^3 + \varphi^2 = 3\varphi + 2, \\
\varphi^5 &= \varphi^4 + \varphi^3 = 5\varphi + 3, \\
\varphi^6 &= \varphi^5 + \varphi^4 = 8\varphi + 5.
\end{aligned}$$

Z lineárního tvaru mocnin čísla φ jsme získali Fibonacciho čísla jak u koeficientů φ^1 , tak u absolutních členů. Obecně lze tuto skutečnost vyjádřit vztahem

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n. \quad (3.13)$$

3.3.2 Odmocnina

V následující části se seznámíme se dvěma nekonečnými výrazy, které uvádí Livio [15]. Prvním je součet nekonečného sledu druhých odmocnin čísla 1:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (3.14)$$

Obě strany rovnice umocníme na druhou a získáme rovnici, kterou můžeme zapsat ve tvaru $x^2 = 1 + x$, která odpovídá rovnici zlatého řezu. Řešením součtu nekonečného sledu odmocnin z čísla 1 je tedy zlaté číslo.

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (3.15)$$

3.3.3 Řetězový zlomek

Druhým nekonečným výrazem související se zlatým řezem je řetězový zlomek, jehož hodnotu chceme určit. Zlomek je zapsán v následujícím tvaru

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}. \quad (3.16)$$

Jmenovatel výrazu na pravé straně odpovídá x , rovnici tedy můžeme napsat jako $x = 1 + \frac{1}{x}$. Vynásobením obou stran neznámou x získáme $x^2 = x + 1$, což stejně jako v předchozím příkladě

odpovídá rovnici zlatého řezu. Výsledkem je tedy

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}. \quad (3.17)$$

Kapitola 4

Platónská tělesa

Pod pojmem platónská tělesa se skrývají útvary, jež nazýváme pravidelnými konvexními mnohostěny. Jak uvádí Vincent [21], pravidelné konvexní mnohostěny musí splňovat následující podmínky:

1. Všechny stěny pravidelného konvexního mnohostěnu jsou totožné a rovnostranné.
2. Všechny úhly u vrcholů pravidelného konvexního mnohostěnu jsou shodné.
3. Každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu lze vepsat či opsat koule.

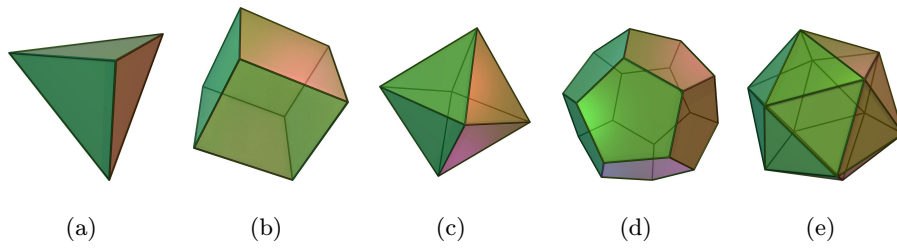
Těles, které splňují tyto podmínky, je pouze pět - **čtyřstěn**, **krychle**, **osmistěn**, **dvanáctistěn** a **dvacetistěn** (obr. 4.3). V publikaci M. Livia „Zlatý řez“ [15] se dočteme, že všechna tato tělesa popsal řecký filozof Platón již v 5. století př.n.l. a přisoudil jim povahu čtyř základních látek tvořících podstatu hmoty. Čtyřstěn představoval v Platónově pojetí oheň, krychle znázorňovala Zemi a vzduch odpovídal osmistěnu. Dvacetistěn symbolizoval vodu a dvanáctistěn, páté těleso, byl připisován vesmíru jako celku. Jak jsme řekli, pravidelných konvexních mnohostěňů najdeme pouze pět. Tento fakt potvrdil Leonardo Euler, který formuloval vztah platný pro každý konvexní mnohostěn (viz rovnice 4.1). Dosazením si můžeme snadno ověřit, že čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn jsou skutečně jedinými mnohostěny, které této rovnici vyhovují.

$$v + s - h = 2. \tag{4.1}$$

v...počet vrcholů mnohostěnu

s...počet stran mnohostěnu

h...počet hran mnohostěnu



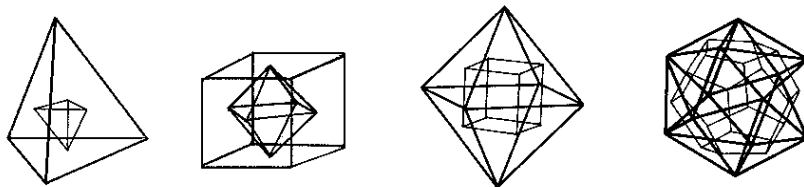
Obrázek 4.1: Platónská tělesa [24]

Název	s	h	v	Typ stěny	Povrch	Objem
Čtyřstěn = TETRAEDR	4	8	6	trojúhelník	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Krychle = HEXAEDR	6	12	8	čtverec	$6a^2$	a^3
Osmistěn = OKTAEDR	8	12	6	trojúhelník	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dvanáctistěn = DODEKAEDR	12	30	20	pětiúhelník	$3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3$
Dvacetistěn = IKOSAEDR	20	30	12	trojúhelník	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$

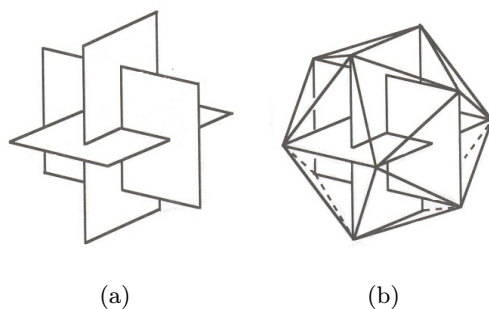
Tabulka 4.1: Charakteristika platónských těles

4.1 Dualita

V tabulce 4.1 jsou uvedeny charakteristiky jednotlivých těles o délce strany a . Pokud budeme sledovat vztah mezi vrcholy a stěnami jednotlivých těles, zjistíme, že mezi některými mnohostěny existuje určitá symetrie. Krychle se skládá z osmi vrcholů a šesti stěn, osmistěn naopak z osmi stěn a šesti vrcholů, díky tomu můžeme vepsat osmistěn do krychle i krychli do osmistěnu. Říkáme, že krychle a osmistěn jsou duálními mnohostěny. Dualitu najdeme i mezi dvanáctistěnem a dvacetistěnem. Jediné platónské těleso, které je duální samo k sobě, je čtyřstěn (obr. 4.2).



Obrázek 4.2: Dualita u platónských těles [9]



Obrázek 4.3: Zlaté obdélníky ve dvacetistěnu [23]

4.2 Zlatý řez v platónských tělesech

Mimo uvedené vlastnosti souvisí platónská tělesa velmi úzce se zlatým řezem. Představme si nyní tři zlaté obdélníky, které mezi sebou navzájem svírají pravý úhel (obr. 4.3(a)). Pokud složíme tyto obdélníky jako na obrázku a spojíme jejich vrcholy, získáme dvacetistěn (obr. 4.3(b)). Když se pozorně zadíváme na toto těleso, všimneme si, že pět rovnostranných trojúhelníků má společných právě vrchol dvacetistěnu. Trojúhelníky tvoří pravidelný pětiboký jehlan, jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník, u kterého jsme si vztah ke zlatému řezu již objasnili. Podle Jirovské [9] můžeme díky symetrii mezi některými platónskými tělesy vepsat jedno těleso do druhého. Dvacetistěn se dá zapsat do dvanáctistěnu (princip duality) tak, že trojice zlatých obdélníků obsažená ve dvacetistěnu se bude svými vrcholy dotýkat středů stěn dvanáctistěnu. Dvacetistěn můžeme vepsat také do osmistěnu, kde vrcholy zlatých obdélníků dělí hrany osmistěnu v poměru zlatého řezu.

Kapitola 5

Fibonacci

Jak uvádí Juškevič [11], Leonardo Pisánský, známý jako Fibonacci¹, se narodil v italské Pise roku 1170 v rodině městského úředníka Bonaccia. Na přání svého otce se věnoval učení aritmetických postupů, které byly potřebné pro výkon povolání státního úředníka. Jeho studia však daleko přesáhla rámec vědomostí, které vyžadovalo jeho povolání. Na svých cestách za obchodem po Egyptě, Sýrii a Byzanci si Leonardo rozšiřoval své vědění o aritmetice, které v roce 1202 shrnul ve svém díle „Liber abaci“ (Kniha o abaku). Tato publikace se stala jedním z nejdůležitějších aritmetických děl pro celou Evropu, jejím hlavním přínosem bylo zavedení indicko-arabských číslic místo římských, zařazení nuly mezi čísla, převod zlomků na nejmenšího společného jmenovatele apod. Můžeme zde najít úlohu o králících, kterou si představíme v následujícím textu. Fibonacci vytvořil další dvě významná díla „Liber quadratorum“ (Kniha čtverců) a „Practica geometriae“ (Praxe geometrie), z nichž čerpalý mnohé další generace matematiků.

5.1 Fibonacciho posloupnost

Fibonacci se ve své knize „Liber abaci“ věnoval různým matematickým výpočtům. Jeho zaujetí pro čísla ho přivedlo k myšlence, jak by vypadala posloupnost, kdyby každý její člen byl součtem dvou předchozích. Tato posloupnost vešla do dějin jako tzv. Fibonacciho posloupnost, nazvaná na počest svého objevitele. Walser [23] uvádí definici Fibonacciho posloupnosti následujícím způsobem.

Fibonacciho posloupnost je dána rekurentním vztahem:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \tag{5.1}$$

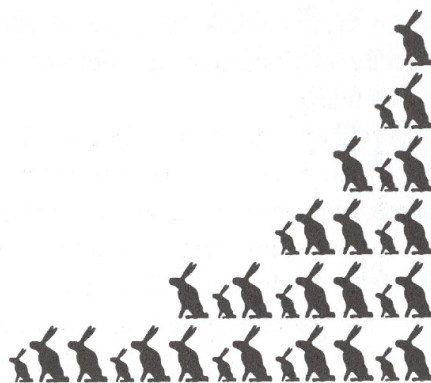
¹Přídomek „Fibonacci“ vznikl složením slov filius Bonacci, což v italštině znamená syn Bonacciův, do češtiny překládáno jako „syn dobrotivé povahy“.

kde $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

Členy této posloupnosti tvoří tzv. Fibonacciho čísla, která kromě prvních dvou vznikají jako součet dvou předchozích: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Tato čísla mají velmi zajímavé vlastnosti a svým významem daleko přesahují hranice matematiky. Jejich výskyt můžeme najít v různých přírodních jevech (například postavení listů na stonku, uspořádání semen apod.). Nejjednodušeji si Fibonacciho posloupnost vysvětlíme na úloze o králících, kterou uvádí Livio [15].

Úloha o králících

Představme si, že máme jeden pár králíků a zajímá nás, kolik párů králíků budeme mít po jednom roce, jestliže se každému dospělému páru každý měsíc narodí jeden pár schopný se za měsíc rozmnožovat. Předpokladem úlohy je, že králíci ve sledované době neumírají.



Obrázek 5.1: Rozmnožování králíků [15]

ŘEŠENÍ:

Na obrázku 5.1 je zobrazeno množení králíků v prvním až šestém měsíci, dospělý pár je znázorněn větší siluetou králíka a mladý pár její zmenšenou kopií. V prvním měsíci máme tedy základní pár, ke kterému se ve druhém měsíci přidá nově narozený pár. Ve třetím měsíci nám mladý pár dospěje a původní dvojice porodí další pár, máme tedy dva dospělé páry a jeden mladý. Ve čtvrtém měsíci již budou tři dospělé páry a dva páry mladých atd. Je zřejmé, že počet párů králíků v určitém měsíci je roven součtu párů z dvou předcházejících měsíců: $1 + 2 + 3 + 5 + 8 + \dots + 377$, což odpovídá Fibonacciově posloupnosti. Posloupnost platí obecně nejenom pro páry, ale funguje i pokud chceme sledovat zvlášť dospělé a mladé páry. Pokud se opět podíváme na tabulku 5.1, zjistíme, že počet dospělých párů v jednotlivých měsících odpovídá posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... a počet mladých párů sleduje tutéž posloupnost pouze posunutou o jeden měsíc: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
M_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
F_k	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabulka 5.1: Množení králíků podle Fibonacciho

k ...měsíce v jednom roce

S_k ...počet dospělých párů

M_k ...počet mladých párů

F_k ...čísla Fibonacciho posloupnosti

Bečvář [4] pro matematické vyjádření vztahu používá následující vzorec:

$$F_k = S_k + M_k = S_k + S_{k-1} = F_{k-1} + F_{k-2}. \quad (5.2)$$

Po jednom roce budeme mít celkem 377 párů králíků. Tuto skutečnost ověříme dosazením hodnot z tabulky 5.1 do uvedeného vzorce:

$$F_{12} = 233 + 144 = 377.$$

5.2 Fibonacciho čísla

Členy Fibonacciho posloupnosti nazývaná Fibonacciho čísla disponují velmi zajímavými vlastnostmi. Představme si členy Fibonacciho posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Knott [13] tvrdí, že pokud bychom sledovali dostatečně dlouho její vývoj, zjistili bychom, že poslední číslice se periodicky opakují. U poslední číslice je tato perioda 60, u posledního dvojčíslí 300. Podobně se chová i poslední trojčíslí, které se opakuje s periodou 1500.

V následujícím textu se podrobněji seznámíme se základními vlastnostmi Fibonacciho čísel podle Vorobjeva [22] a ukážeme si, jak tato čísla souvisí se zlatým řezem.

5.2.1 Základní vlastnosti

1. Součet prvních n Fibonacciho čísel:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1. \quad (5.3)$$

Důkaz provedeme tak, že sečteme jednotlivé členy posloupnosti

$$u_1 = u_3 - u_2,$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_4 - u_3, \\
&\vdots \\
u_n &= u_{n+2} - u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Součtem získáme rovnici $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2$, kde $u_2 = 1$.

2. *Součet Fibonacciho čísel s lichými indexy:*

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}. \quad (5.4)$$

Abychom dokázali uvedenou rovnost, musíme opět sečíst jednotlivé členy posloupnosti

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_2, \\
u_3 &= u_4 - u_2, \\
u_5 &= u_6 - u_4, \\
&\vdots \\
u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2},
\end{aligned}$$

tím získáme požadovaný výsledek.

3. *Součet Fibonacciho čísel se sudými indexy:*

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \quad (5.5)$$

Pokud od upravené rovnosti 5.3 odečteme rovnost 5.4, získáme

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

4. *Součet čtverců prvních n Fibonacciho čísel:*

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}. \quad (5.6)$$

Nejdříve si musíme uvědomit, že $u_k \cdot u_{k+1} - u_{k-1} \cdot u_k = u_k \cdot (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$

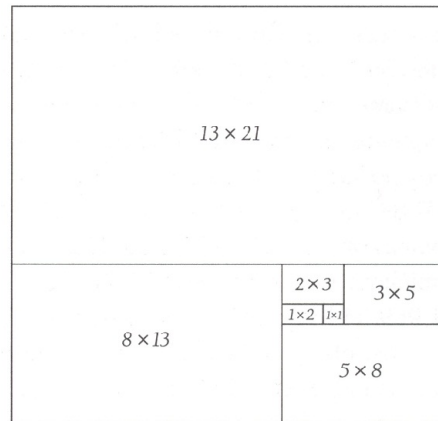
Potom sečtením členů následujících rovností získáme vztah 5.6.

$$\begin{aligned}
u_1^2 &= u_1 \cdot u_2, \\
u_2^2 &= u_2 \cdot u_3 - u_1 \cdot u_2, \\
u_3^2 &= u_3 \cdot u_4 - u_2 \cdot u_3, \\
&\vdots \\
u_n^2 &= u_n \cdot u_{n+1} - u_{n-1} \cdot u_n.
\end{aligned}$$

5. Kvadratury obdélníků:

Jak uvádí Livio [15], další vlastností Fibonacciho čísel je, že lichý součet součinů následných členů Fibonacciho posloupnosti se rovná druhé mocnině posledního čísla. Tuto vlastnost si můžeme snadno ověřit pomocí obrázku 5.2.

$$u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_3 + u_3 \cdot u_4 + \dots + u_{2n} \cdot u_{2n+1} = u_{2n+1}^2. \quad (5.7)$$



Obrázek 5.2: Kvadratury obdélníků [15]

6. Výpočet n -tého členu Fibonacciho posloupnosti:

Již víme, jak vypadá Fibonacciho posloupnost a dokážeme si představit několik prvních členů této posloupnosti. Dosud jsme tyto členy určovali pouze rekurentně, tedy postupně pro jeden index za druhým. Existuje však **Binetův vzorec**, který nám umožňuje vypočítat libovolné číslo Fibonacciho posloupnosti, aniž bychom znali hodnotu dvou předcházejících členů.

$$u(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (5.8)$$

Když si pozorně prohlédneme Binetův vzorec, zjistíme, že zlomky v závorkách odpovídají následujícím způsobem zlatému číslu:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &= \varphi, \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} &= 1 - \varphi. \end{aligned}$$

Binetův vzorec můžeme tedy psát ve tvaru

$$u(n) = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}. \quad (5.9)$$

ODVOZENÍ:

Odvození Binetova vzorce najedeme opět u Vorobjeva [22], který vychází z rovnice Fibonacciho posloupnosti ve tvaru

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \quad (5.10)$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru geometrické posloupnosti

$$1, q, q^2, \dots$$

Musí tedy platit, že

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}.$$

Po vydělení rovnice číslem q^{n-2} získáme rovnici odpovídající zlatému řezu:

$$q^2 = q + 1,$$

jejíž kořeny $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou kvocienty hledaných posloupností. Tyto kvocienty označíme jako α a β . Protože máme dva kvocienty, máme také dvě geometrické posloupnosti, které jsou řešením rovnice 5.10. Lze ukázat, že i poloupnosti v následujícím tvaru, kde c_1 a c_2 jsou hledané konstanty, jsou řešením rovnice 5.10.

$$c_1 + c_2, c_1\alpha + c_2\beta, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \dots$$

Čísla c_1 a c_2 určíme z rovnice

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= u_1, \\ c_1\alpha + c_2\beta &= u_2. \end{aligned}$$

První dvě čísla Fibonacciho posloupnosti jsou 1 a 1. Jedničky tedy dosadíme za u_1 a u_2 do soustavy

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= u_2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy získáme $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ a $c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Dosadíme do rovnice

$$u_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1},$$

tedy

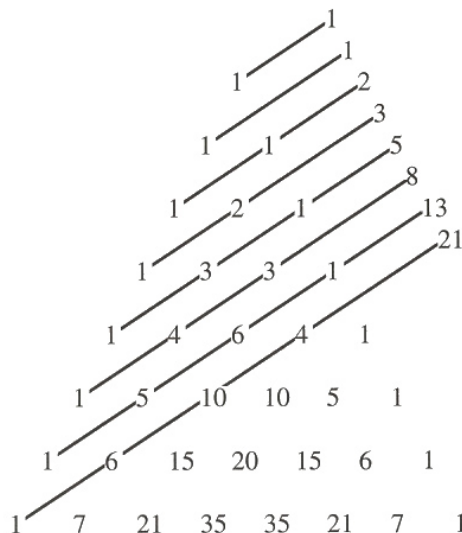
$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Další vzorce a poučky, které platí pro Fibonacciho čísla, si již uvedeme bez důkazu a podrobnějšího popisu

- $u_{n+m} = u_{m-1}u_n + u_mu_{n+1}$,
- $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$,
- největší společný dělitel dvou Fibonacciho čísel je opět Fibonacciho číslo,
- je-li číslo n dělitelné číslem m , je také číslo u_n dělitelné číslem u_m ,
- Fibonacciho číslo je sudé, pokud je jeho index dělitelný třemi.

5.2.2 Fibonacciho čísla v Pascalově trojúhelníku

Nyní si ukážeme, jak Fibonacciho čísla souvisí s binomickými koeficienty. Binomické koeficienty jsou pro přehlednost uspořádány do geometrického schématu - Pascalova trojúhelníka - v němž jsou zobrazeny jako kombinační čísla nebo jejich vyčíslené hodnoty. Na obrázku 5.3 vidíme Pascalův trojúhelník. Na úhlopříčkách, které stoupají směrem zleva doprava, se nachází čísla, jejichž součet nám dává Fibonacciho číslo.



na n -té úhlopříčce, je dokázáno, že součet čísel na jakékoli ze stoupajících úhlopříček Pascalova trojúhelníka je Fibonacciho číslem.

5.3 Souvislost Fibonacciho čísel se zlatým řezem

Už jsme si ukázali, že zlatý řez se objevuje ve vzorci pro výpočet n -tého členu Fibonacciho posloupnosti. Mezi těmito dvěma jevy je však mnohem silnější provázanost. Pojďme se nyní podívat na podíl dvou sousedních Fibonacciho čísel podle Livia [15].

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} &= 1,000, \\ \frac{2}{1} &= 1 + \frac{1}{1} = 2,000, \\ \frac{3}{2} &= 1 + \frac{1}{1+1} = 1,500, \\ \frac{5}{3} &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = 1,666, \\ \frac{8}{5} &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = 1,600, \\ \frac{13}{8} &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = 1,625. \\ &\vdots\end{aligned}$$

Z uvedených vztahů je zřejmé, že čím vyšší Fibonacciho čísla mezi sebou dělíme, tím více se jejich podíl blíží hodnotě zlatého řezu. Chmelíková [5] tuto skutečnost znázorňuje pomocí následujících limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi. \quad (5.11)$$

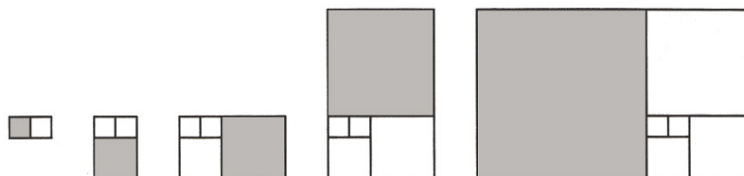
DŮKAZ:

Z Binetova vzorce víme dosadíme za u_n a u_{n+1} , tedy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\varphi^n - (1-\varphi)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n - (1-\varphi)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} (1-\varphi)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n - \lim_{n \rightarrow \infty} (1-\varphi)^n} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{n+1} - 0}{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^n \cdot \varphi}{\varphi^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi = \varphi.\end{aligned}$$

Souvislost mezi Fibonacciho čísly a zlatým řezem demonstruje Walser [23] na následujícím příkladě: zkusme si vybavit zlatý obdélník a jeho proložení čtverci, které nám do nekonečna

vytváří další zlaté obdélníky. Uvažujme nyní opačný částečně modifikovaný způsob, kdy k nejmenšímu čtverci přidáme čtverec o stejné straně a k oběma pak další čtverec o straně, která se rovná součtu stran dvou předešlých čtverců (obr. 5.4). Dalším přidáváním čtverců vznikne obdélník jehož poměr stran se bude blížit zlatému řezu. Zdůvodnění je zcela prosté - posloupnost délek stran jednotlivých čtverců odpovídá členům Fibonacciho posloupnosti - podíl rostoucích stran obdélníků se tedy blíží zlatému poměru.



Obrázek 5.4: Napojování čtverců [23]

Kapitola 6

Zlatý řez v přírodě

Příroda disponuje nepřehledným množstvím rozmanitých tvarů a barev, přesto v ní můžeme najít určitý řád, který se uplatňuje jak v rostlinné, tak v živočišné říši.

6.1 Rostliny

6.1.1 Fylotaxe

Fylotaxe je naukou o postavení listů na stonku rostliny. Touto vědou se začali zabývat lidé již ve starověku, své jméno však získala až v polovině 18. století, kdy ji švýcarský přírodovědec Charles Bonnet označil pojmem *fylotaxe*. Podle Slavíkové [20] příroda rozmisťuje listy na stonku třemi základními způsoby:

- Přeslenité - listy vyrůstají po třech a více z jedné uzliny.
- Vstřícné - dvojice listů vyrůstají naproti sobě po obvodu stonku vzájemně otočeny o 90° .
- Střídavé - listy jsou uspořádány do šroubovice.

Vzácně se může vyskytnout i neuspořádané rozmístění, to je však typické pouze pro primitivní druhy rostlin. Nejběžnějším uspořádáním listů na stonku je střídavé postavení. Jak uvádí Olsen [17], najdeme ho až u 80 procent vyšších rostlin. Listy jsou uspořádány do šroubovice, která se v botanice nazývá *genetická spirála*. Když postupujeme po této genetické spirále směrem vzhůru, narazíme po určitém počtu otoček na list, který vyrůstá přesně nad listem, od kterého jsme začínali. Části genetické spirály, které jsou odděleny listy vyrůstajícími přímo nad sebou, označujeme jako cykly. Tyto cykly můžeme charakterizovat pomocí fylotaktického poměru, který nám udává úhel divergence¹. Na obr. 6.1 jsou znázorněny tři různé

¹Úhel divergence je takový úhel, který svírají spojnice středu stonku se dvěma sousedními listy.

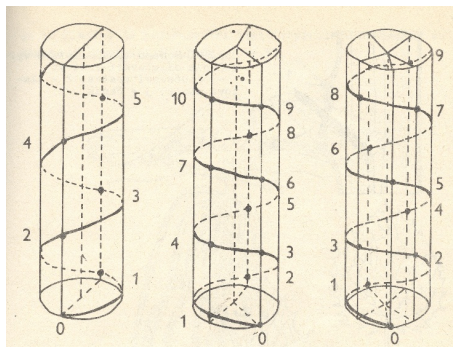
divergence postavení listů, konkrétně $1/2$, $1/3$ a $2/5$. První genetická spirála obsahuje cykly po dvou listech na jednu otáčku, prostřední po třech listech na jednu otáčku a poslední spirála je dána cykly s pěti listy na dvě otáčky. U Livia [15] najdeme některé druhy divergencí a jejich zástupce.

$1/2$ = lípa, vinná réva, ...

$1/3$ = líska, ostružina, buk, ...

$2/5$ = jabloň, meruňka, ...

$3/8$ = hrušně, smuteční vrba, ...



Obrázek 6.1: Schéma střídavého postavení listů na stonku [20]

Divergencí najdeme v přírodě mnoho. Jednotlivé poměry mají zajímavou vlastnost, všechny totiž odpovídají poměrům Fibonacciho čísel

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots$$

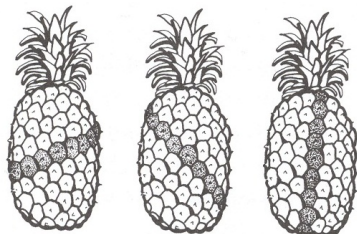
Souvislost mezi fylotaxí a Fibonacciho čísla objevil podle Livia [15] již německý astronom Johannes Kepler. Botanici Karl Friedrich Schimper, Alexandr Braun a bratři Bravaisové pak objevili pravidlo, podle něhož se fylotaktické poměry dají vyjádřit pomocí poměrů Fibonacciho čísel. Dalším významným objevem bylo, že Fibonacciho čísla se vyskytují i u parastichů² borových šišek a ananasů.

6.1.2 Druhotné spirály

Na obrázku 6.2 jsou znázorněny 3 druhy spirál, které můžeme najít u ananasu. Počet spirál stoupajících zleva doprava je na celé ananasové kůře obvykle 21, ve směru zprava doleva jich napočítáme 13. Třetí druh čítající 8 spirál je velmi strmý a postupuje vzhůru od levé dolní

²Parastichy = druhotné spirály objevující se u některých rostlin (kaktusy) nebo jejich částí (šupiny borových šišek).

části k pravé horní. Další příklad druhotných spirál najdeme u uspořádání šupin borových šišek (obr. 6.3). Všechna čísla druhotných spirál jsou opět členy Fibonacciho posloupnosti stejně jako čísla u fylotaktického poměru.

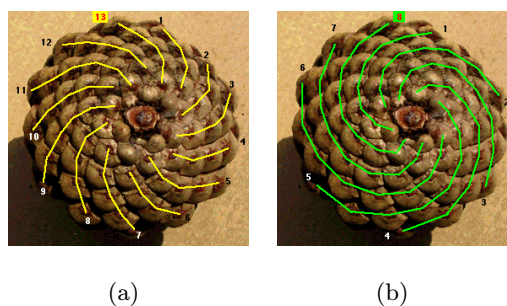


Obrázek 6.2: Druhotné spirály kůry ananasu [15]

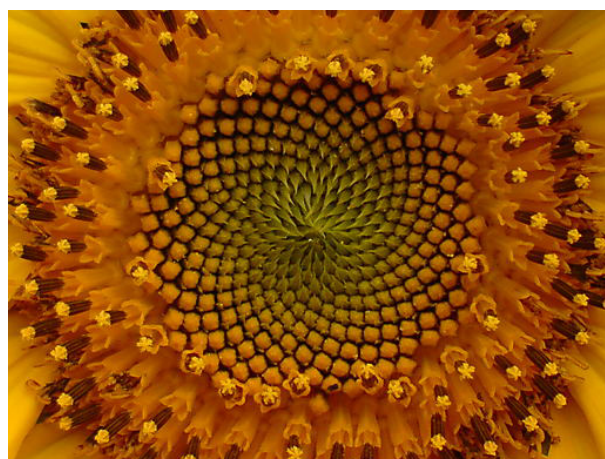
Bratři Bravaisové objevili, že ideální uspořádání listů je takové uspořádání, jehož divergenční úhel je roven $137,5^\circ$. Doplněk tohoto úhlu k 360° je roven úhlu $222,5^\circ$, který získáme vydělením 360° hodnotou φ . Úhel $137,5^\circ$ je proto označován jako *zlatý úhel*. Příroda využívá φ prostřednictvím tohoto úhlu z jednoho prostého důvodu. Číslo φ je iracionálním číslem, nelze tedy zapsat ve tvaru zlomku dvou celých čísel. To je v přírodě velmi výhodné, neboť čím více se fylotaktický poměr rostliny blíží tomuto číslu, tím méně si její listy vzájemně stíní, a mohou tak využít maximum sluneční energie a vláhy. Zlatý úhel se netýká pouze postavení listů, ale vyskytuje se i u rozmístění semen nebo okvětních plátků. Názorný příklad uspořádání semen ve zlatém úhlu najdeme u slunečnice. Díky maximálnímu využití horizontálního prostoru vytvářejí semena slunečnice dva druhy spirál (po směru hodinových ručiček a proti). Jednotlivá semínka vyplňují celý prostor květního lůžka slunečnice pouze při rozmístění ve zlatém úhlu. Kdybychom jejich rozmístění změnili jen o jedinou desetinu stupně, protisměrné spirály by se objevovaly jen kolem středu, kde jsou semínka maximálně nahuštěna a blíže k obvodu už bychom našli spirály pouze v jednom směru. Počty protisměrných spirál závisí na velikosti slunečnice, nejčastěji se objevuje 55 spirál v jednom směru a 34 v druhém (obr. 6.4). Existují však i slunečnice s počty spirál 89/55, 144/89, výjimečně i 233/144. Opět vidíme, že počty spirál jsou Fibonacciho čísla. Příroda si v těchto číslech našla velkou oblibu.

6.1.3 Květy a Fibonacciho čísla

Kromě uvedených příkladů je můžeme najít u větvení některých rostlin (bertrám obecný) i v počtu okvětních plátků (obr. 6.5). Jak se můžeme dočíst na webových stránkách World Mysteries [25], nejobvyklejším počtem okvětních plátků je pět. Toto číslo najdeme například u orlíčku nebo divoké růže. Příroda však ve stavbě květů využívá i další Fibonacciho čísla:



Obrázek 6.3: Levotočivé a pravotočivé druhotné spirály u borové šišky [12]

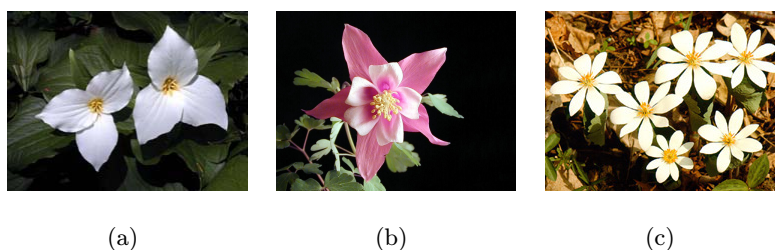


Obrázek 6.4: Prostisměrné spirály u slunečnice [16]

- 3 plátky: lilie, ...
- 5 plátků: pryskyřník, ...
- 8 plátků: stračka, ...
- 13 plátků: starček, ...
- 21 plátků: čekanka, ...
- 34 plátků: řimbaba, ...
- 55, 89 plátků: zástupci z čeledě hvězdnicovitých.

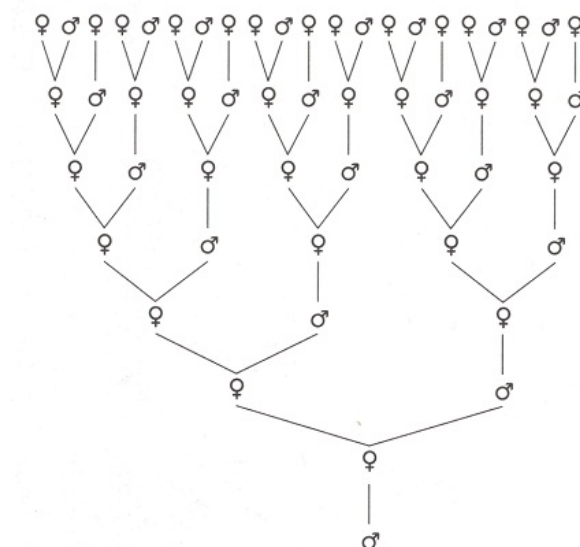
6.2 Živočichové

Fibonacciho čísla a zlatý řez nejsou zvláštností ani u živočichů. V páté kapitole jsme si ukázali růst králíčí populace popisující Fibonacciho posloupnost. Tento příklad byl založen na nereálných předpokladech, neboť králíci během sledované doby neumírali a dospělý pár rodil pravidelně každý měsíc právě jeden nový pár. V přírodě však Fibonacciho posloupnost skutečně existuje, a to v rodokmenu trubců. Trubci jsou včelí samečci, kteří se vyvíjejí z neoplozených



Obrázek 6.5: trojčet velkokvětý (a), orlíček obecný (b) a krevnice lékařská (c) [25]

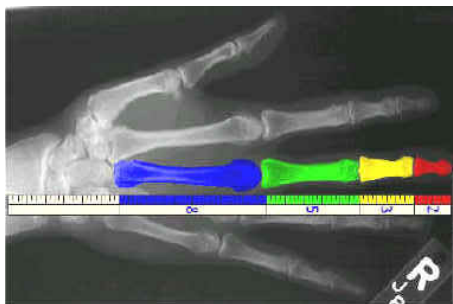
vajíček dělnic, mají tedy pouze matku na rozdíl od dělnic, které mají oba rodiče. Z rodokmenu trubců na obrázku 6.6 je zřejmé, že každý trubec má 1 matku, 2 prarodiče, 3 praprarodiče, atd. Počty včelích jedinců v každé generaci nám tedy dávají opět Fibonacciho čísla.



Obrázek 6.6: Rodokmen trubců [15]

6.2.1 Lidské tělo

Myšlenka, že lidské tělo je vystavěno v poměru zlatého řezu, byla vyslovena již ve starověku. Prozkoumejme podrobněji lidskou ruku. Každý z nás má dvě ruce, na každé ruce se nachází pět prstů, každý prst (kromě palce) je rozdělen na tři články. Na obrázku 6.7 vidíme barevně rozlišené tři články tvořící prostředníček a čtvrtý článek ukrytý v dlani. Délky jednotlivých úseků odpovídají členům Fibonacciho posloupnosti, což jasně ukazuje na souvislost se zlatým řezem. Podobné tvrzení panuje i o poměru segmentů končetin i celého těla a dokonce o struktuře DNA.

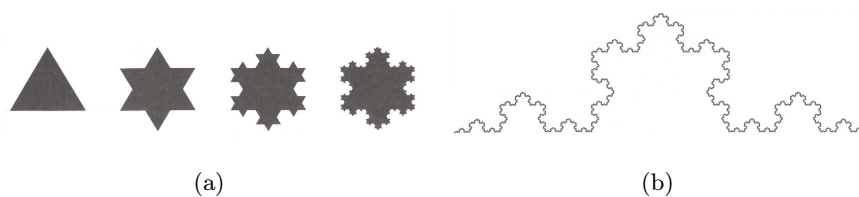


Obrázek 6.7: Fibonacciho čísla u článků prostředníku [25]

6.2.2 Logaritmická spirála v přírodě

Jak jsme řekli v úvodu kapitoly, příroda disponuje nepřeberným množstvím různých tvarů, z nichž logaritmické spirály patří k jednomu z nejoblíbenějších. Podle Jirovské [10] byl tímto tvarem fascinován i Jacques Bernoulli (1654-1705), člen slavné matematické rodiny. Jeho okouzlení vedlo k tomu, že označil logaritmickou spirálu termínem *Spira mirabilis* (zázračná spirála). Logaritmická spirála je charakterizována neustálým prodlužováním poloměru při vzdalování křivky od svého středu, jinými slovy zachovává tvar a poměr částí. V přírodě se vyskytuje v podobě neživých částí živočichů - rohy, parohy, zobáky, drápy, zuby a schránky měkkýšů. Náznorným příkladem logaritmické spirály je tvar schránky loděnky hlubinné (*Nautilus pompilius*), mořského hlavonožce, který si s rostoucí velikostí svého těla buduje vždy znovu novou komůrku oddělenou od původní tenkou přepážkou (obr. 6.8).

Obrázek 6.8: *Nautilus pompilius* [16]



Obrázek 6.9: Kochova vločka [15]

6.3 Fraktály

Fraktály jsou geometrické objekty se zdánlivě složitou strukturou. Jejich typickou vlastností je soběpodobnost, kdy fraktální obrazec je utvářen z částí, které jsou zmenšenými kopiemi celého obrazce. Jak uvádí Livio [15], termín *fraktál*³ použil poprvé Benoit B. Mandelbrot, francouzský matematik a zakladatel fraktální geometrie, který utřídil a doplnil v té době již známé koncepty do jednotného celku. Fraktální geometrie má obrovský význam při popisu tvarů a objektů reálného světa. Většina skutečných objektů bývá příliš složitá na to, abychom je mohli popsat prostřednictvím eukleidovské geometrie, naproti tomu fraktální geometrie dokáže znázornit i velmi složité struktury jakými jsou například vodní síť, strukturu plic, tvar mraků nebo elektrický výboj.

Jedním ze základních tvarů vyskytujících se ve fraktální geometrii je Kochova vločka (obr. 6.9), která byla poprvé popsána roku 1904. Na jejím tvaru si můžeme snadno vysvětlit princip vytváření fraktálů. Základem vločky je rovnostranný trojúhelník o délce jeden centimetr. Ke středům stran tohoto trojúhelníka připojíme další trojúhelníky zmenšené oproti předchozímu v poměru 1:3. K těmto trojúhelníkům připojíme další trojúhelníky opět zmenšené o jednu třetinu (obr. 6.9(a)). Postupným opakováním tohoto postupu získáme členitý obrazec zvaný Kochova vločka (obr. 6.9(b)).

Liviovy poznatky doplňuje Walser, který se tématu fraktálů podrobně věnuje ve své knize „The Golden Section“ [23]. Dovíme se zde, že k přesnému popisu fraktálů potřebujeme znát jejich dimezi D a faktor změny délky f .

6.3.1 Výpočet fraktální dimenze

Fraktální dimezi D získáme odvozením ze vztahů, které platí v celočíselných dimenzích. Zjistíme tedy množství podobných objektů, které lze v jednotlivých dimenzích získat při daném faktoru změny délky. Úsečka je jednorozměrný objekt ($D = 1$), pokud ji rozdělíme na polovinu ($f = \frac{1}{2}$), získáme 2 úseky. Když rozdělíme čtverec ($D = 2$) v polovině jeho strany ($f = \frac{1}{2}$),

³ Výraz *fraktál* pochází z latinského slova *fractus* = rozdělený, rozlomený.

získáme $4 = 2^2$ menších čtverců. Jestliže použijeme dělení strany čtverce na třetiny $f = \frac{1}{3}$, vyjde nám $9 = 3^2$ čtverců. U trojrozměrné krychle ($D = 3$) nám při použití faktoru $f = \frac{1}{2}$ vznikne $8 = 2^3$ krychlí a při použití faktoru $f = \frac{1}{3}$ vynikne $27 = 3^3$ krychlí. Číslo udávající počet podoblastí v určité dimenzi můžeme vyjádřit rovnicí

$$n = \left(\frac{1}{f}\right)^D. \quad (6.1)$$

Dimenzi D vyjádříme z rovnice tak, že nejdříve obě strany zlogaritmujeme a upravíme podle pravidla pro počítání s logaritmy:

$$D = \frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{\log n}{\log 1 - \log f} = \frac{\log n}{0 - \log f} = -\frac{\log n}{\log f}. \quad (6.2)$$

6.3.2 Výběr faktoru změny délky

Hlavním rysem řady přírodních fraktálů je větvení. Na obr. 6.10(a) vidíme základní větev o délce 1 dělicí se pod úhlem 120° na dvě dceřinné větve o délce $\frac{1}{2}$. Každý dceřinná větev se opět dělí pod úhlem 120° na dvě větve o poloviční délce, tedy o délce $\frac{1}{4}$. Tento postup opakujeme do nekonečna. Při faktoru změny délky $f = \frac{1}{2}$ vznikají mezi jednotlivými větvemi prázdná místa. Pokud tato prázdná místa odstraníme, získáme strukturu, jež maximálně využívá volného prostoru aniž by se její libovolné části překrývaly. Toho docílíme výběrem vhodného faktoru, jehož hodnotu odvodíme z obrázku 6.10(b). Dceřinná větev faktoru změny délky f se zvedá v úhlu 30° k vodorovné rovině, což využijeme v následujícím výpočtu:

$$\begin{aligned} f \cos 30^\circ &= f^3 \cos 30^\circ + f^4 \cos 30^\circ + f^5 \cos 30^\circ + \dots \\ f &= f^3 + f^4 + f^5 + \dots = \frac{f^3}{1-f}. \end{aligned}$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

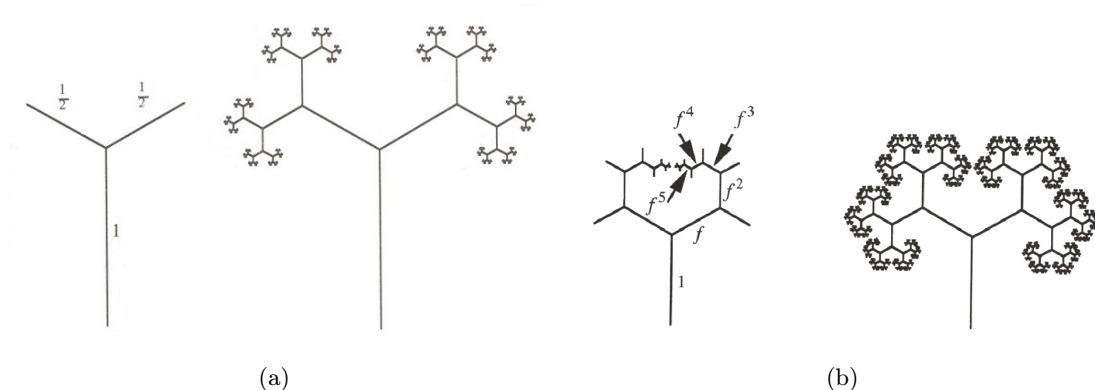
$$1 - f = f^2, \quad (6.3)$$

jehož řešením je $f = \frac{1}{\varphi}$.

Jestliže známe faktor délkové změny zlatého stromu, lze snadno dopočítat jeho dimenzi dolněním do vztahu 6.2:

$$D = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{\varphi}} \approx 1.4404.$$

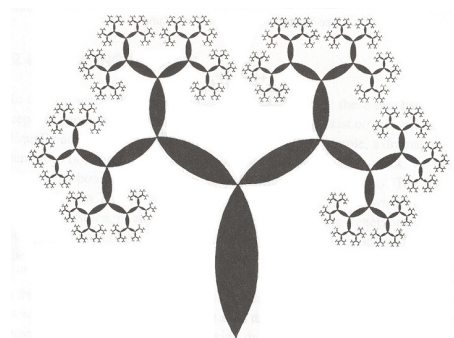
Množství nových přírůstků uvedeného větvení můžeme popsat exponenciální funkcí $y = 2^k$, kde k je počet generací (generace „0“ označuje základní větev). Je zřejmé, že pokud budeme

Obrázek 6.10: Větvení pod úhlem 120° [23]

dlouho opakovat postup větvení, nebude naše oko schopné rozeznat linie jednorozměrných čar. Vhodnější metodou je znázorňovat fraktální obrazce pomocí dvojrozměrných objektů, které naše oko lépe registruje. Na obr. 6.11 vidíme větvení útvaru zvaný lunetka při faktoru $f = \frac{1}{\varphi}$, který se používá ke znázornění zlatého stromu. (obr. 6.12).

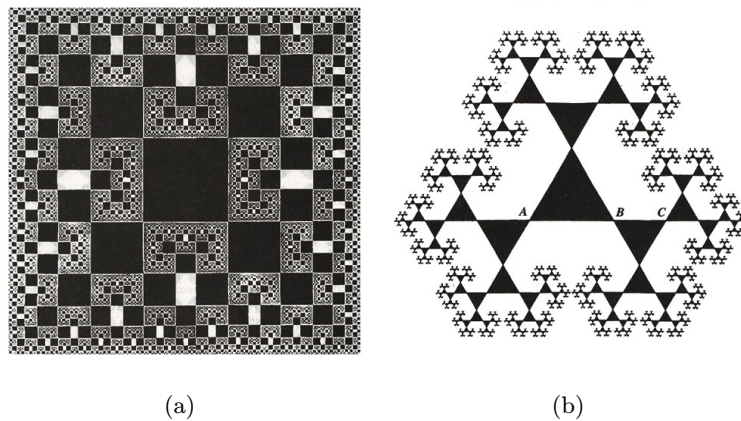


Obrázek 6.11: Větvení lunetky [23]



Obrázek 6.12: Zlatý strom vytvořený z lunetek [23]

Mezi další dvojrozměrné útvary, které se používají v souvislosti s fraktály, jsou rovnostranné trojúhelníky nebo čtverce. Při využití faktoru $f = \frac{1}{\varphi}$ se opět vytvoří struktury, jejichž větve se budou navzájem dotýkat. U větvení čtverce nalezneme navíc i obdélníky, jejichž strany odpovídají zlatému řezu. Jak bylo řečeno, fraktální geometrii můžeme najít u mnoha přírodních jevů. Nádherným příkladem je brokolice romanesco, variantní forma nám známého kvěťáku, jejíž zmenšené kopie vytvářejí na povrchu viditelné spirály (obr. 6.14).



Obrázek 6.13: Čtvercová a trojúhelníková fraktální struktura [23]



Obrázek 6.14: Brokolice romanesco [12]

Kapitola 7

Zlatý řez v umění

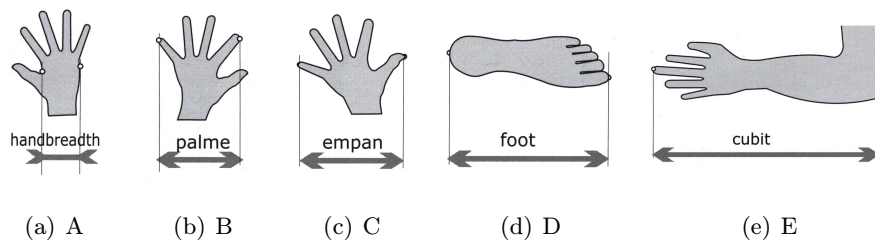
Na první pohled by se mohlo zdát, že matematika s uměním nemá mnoho společného. Opak je však pravdou, neboť krásné sochy, monumentální budovy i slavné obrazy v sobě skrývají mnohé z matematických pouček a vztahů, které oku pozorovatele zůstávají utajeny. Nelze tvrdit, že každý umělec musí být nutně i nadaným matematikem. Z výroku Leonarda da Vinci: „*Ať mé dílo nečte nikdo, kdo není matematik*“ (Livio [15, s. 124]) je jasné, že matematika byla s uměním propojena velmi úzce již od dávných časů.

7.1 Architektura

Jednou z oblastí umění, ve které je matematika přímo nezbytnou součástí, je architektura. To, že podstata architektury je vystavěna na základech geometrie a také na úměře (poměru mezi jednotlivými částmi), si uvědomovali již ve starověkém Egyptě a Řecku. Poměr zlatého řezu se údajně objevil již při stavbě pyramid nebo u řeckém Parthenónu, o nichž jsme mluvili v úvodu o historii zlatého řezu.

7.1.1 Románská měřidla

Mnozí umělci si byli vědomi nádhery, kterou v sobě zlatý řez skrývá, a snažili se ho proto zakomponovat i do svých děl. Podle některých teorií se nachází zlatý řez i v lidských proporcích. A právě měrný systém založený na proporcích lidského těla používali románští stavitelé při budování svých děl. Jednotlivé měrné jednotky odpovídající průměrným velikostem určitých částí lidského těla mají zajímavou vlastnost, odpovídají totiž mocninám φ . Mezi pět základních měrných jednotek užívaných románskými architekty podle Vincenta [21] patří: šířka dlaně, rozpětí malíku a ukazováku, rozpětí malíku a palce, délka chodidla a vzdálenost lokte od špičky



Obrázek 7.1: Měrné jednotky románských stavitelů [21]

prostředníku (obr. 7.1). Šířka rozpětí malíku a palce odpovídá jednotkové velikosti, z níž jsou odvozeny další pomocí násobení hodnotou φ . Pro snadnější zápis označíme měrné jednotky velkými písmeny.

- A ... šířka dlaně = $\frac{1}{\varphi^2} = 7,64 \text{ cm}$
- B ... rozpětí malíku a ukazováku = $\frac{1}{\varphi} = 12,36 \text{ cm}$
- C ... rozpětí malíku a palce = $1 = 20 \text{ cm}$
- D ... délka chodidla = $\varphi = 32,36 \text{ cm}$
- E ... vzdálenost lokte od špičky prostředníku = $\varphi^2 = 52,36 \text{ cm}$

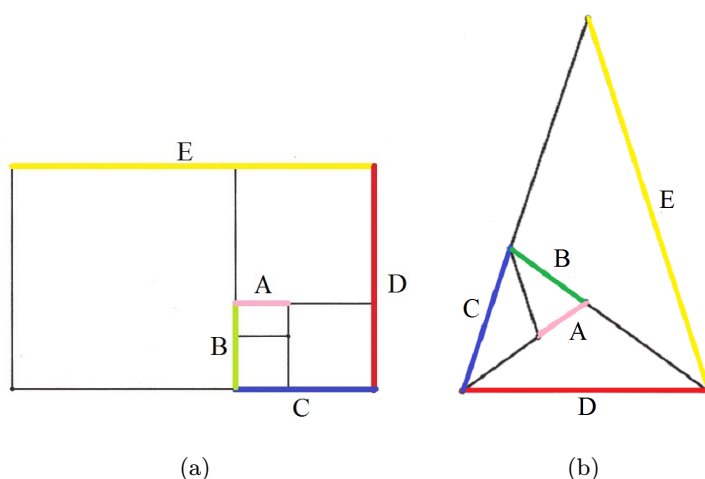
Z jednotlivých charakteristik lze snadno odvodit, že

$$\frac{E}{D} = \frac{D}{C} = \frac{C}{B} = \frac{B}{A} = \varphi$$

Připomeňme si nyní zlatý trojúhelník a zlatý obdélník. Do obou těchto obrazců lze vepsat jejich zmenšené kopie tak, že pokud vezmeme libovolnou stranu a její zmenšenou kopii, bude se jejich poměr rovnat φ . Jak jsme si právě ukázali, každé dvě sousední měrné jednotky založené na velikosti lidských segmentů jsou také v poměru φ . Můžeme je tedy znázornit pomocí obou uvedených rovinných útvarů (obr. 7.2). Další vlastností těchto měrných jednotek je, že odpovídají Fibonacciho posloupnosti, tedy

$$\begin{aligned} A + B &= C, \\ B + C &= D, \\ C + D &= E. \end{aligned}$$

Sečtením hodnot $A + B + C + D + E = 124,72 \text{ cm}$ získáme délku stavitelské hole rozdělené na jednotlivé úseky odpovídající měrným jednotkám, která byla známá již v Egyptě.



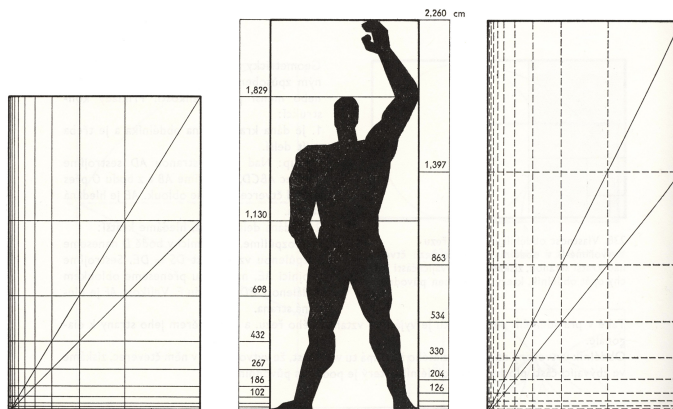
Obrázek 7.2: Měrné jednotky ve zlatých útvarech - upraveno [5]

7.1.2 Le Corbusier

Přítomnost zlatého řezu v dílech mnoha umělců je silně spekulativní, často chybí jakýkoliv důkaz potvrzující záměrné použití tohoto poměru. Švýcarsko-francouzský architekt a výtvarník Le Corbusier však do této skupiny rozhodně nepatří. Le Corbusier, vlastním jménem Charles Édouard Jeanneret, (1887-1965) se narodil ve Švýcarsku. Věhlas však získal až v Paříži, kam se ve svých téměř 30ti letech přestěhoval a začal se věnovat proporčním systémům a jejich roli v estetice. Le Corbusier se zpočátku o zlatý řez nijak zvlášť nezajímal, to se radikálně změnilo po vydání knih M. Ghyky „Estetika proporcí v přírodě a v umění“ a „Zlaté číslo, pythagorejské obřady a rytmy ve vývoji západní civilizace“, které zlatý řez značně zpopularizovaly. Podobně jako románští stavitelé našel i tento umělec zalíbení v proporčním systému opírajícím se o lidské rozměry v závislosti na zlatém řezu. Vytvořil nový poměrový systém zvaný *modulor*, jehož základ tvořila lidská postava se zdviženou rukou. Jak uvádí Livio [15], modulor ztělesňoval harmonické měřítko lidské míry aplikovatelné v architektuře či mechanice. Modulor je založen na dvou sériích měření, které uvádí Crhák a Kostka [6].

1. Výška člověka (183 cm)
2. Výška člověka včetně zvednuté ruky (226 cm)

Obě naměřené hodnoty jsou následujícím způsobem rozděleny v poměru zlatého řezu. Výška postavy (183 cm) ku výšce jejího pupku (113 cm) odpovídá zlatému řezu stejně jako celková výška postavy včetně zvednuté ruky (226 cm) ku úrovni zápěstí druhé ruky (86 cm). Oba tyto poměry jsou dále členěny na menší úseky tak, že v každé sérii se jeden úsek rovná součtu dvou předchozích, z čehož vyplývá analogie s Fibonacciho posloupností. Jestliže navíc zakreslíme obě



Obrázek 7.3: Modulor [6]

série do sebe, zjistíme, že úseky první série půlí úseky série druhé.

Modulor představoval model standardizace, podle něhož by bylo možno vyrábět téměř cokoliv. Le Corbusier ho zakomponoval do mnoha svých projektů a své poznatky shrnul v knihách „Le Modulor“ a „Le Modulor II“. Svůj proporční systém představil i Albertu Einsteinovi, který se o modulorovi vyjádřil jako o škále proporcí, díky níž je těžké udělat něco špatně a naopak je snadné udělat to dobře.



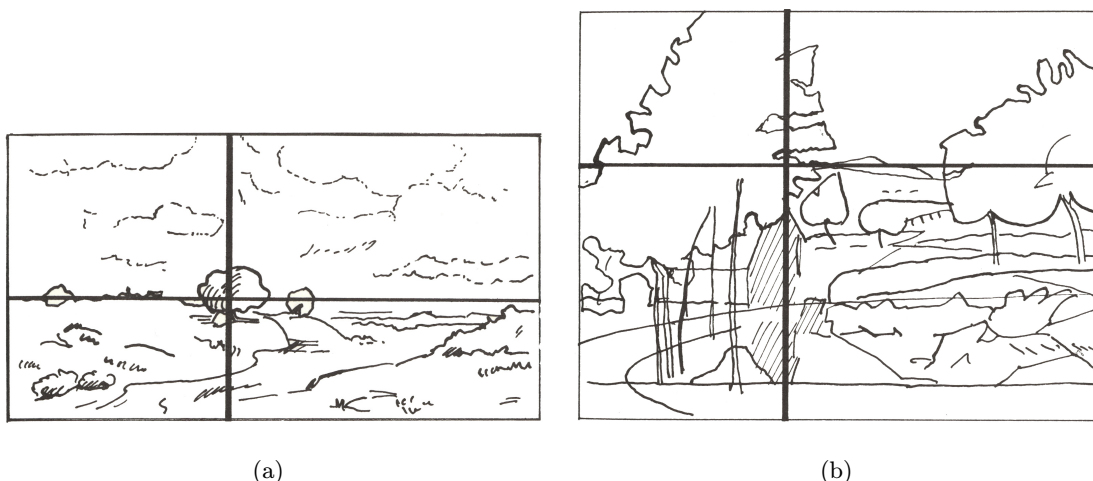
(a)



(b)

Obrázek 7.4: Zlatý řez v moderním umění [26]

V současné době se mnoho architektů vrací k antickým ideálům posvátné geometrie a hledání krásy. Důkazem toho je vchod do galerie v Louvru ve tvaru skleněné pyramidy (obr. 7.4(a)) nebo La Géode (obr. 7.4(b)), jejíž tvar je odvozen z platónského tělesa - dvacetistěnu - jehož stěny jsou promítnuty do koule a dále rozděleny na menší trojúhelníky.



Obrázek 7.5: Brána harmonie a zlatý řez [7]

7.2 Malířství

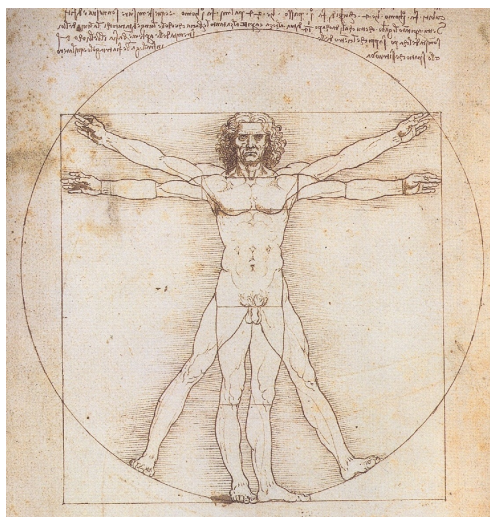
7.2.1 Kompozice

Podle Hrona [7] má v umění termín kompozice dva významy. Prvním z nich je samotná činnost (komponování) a druhým výsledek této činnosti (výstavba obrazu z linií, ploch a barev). Při tvorbě kompozice se snažíme vytvořit pomocí více či méně ověřených postupů takový výsledek, jenž by lahodil oku pozorovatele. Jedním z faktorů, které nám mohou v našem snažení pomoci, je uplatnění známých poměrů budících pocit harmonie a souladu mezi jednotlivými částmi obrazu. Mezi dva základní harmonické poměry patří:

- Brána harmonie
- Zlatý řez

Brána harmonie označuje poměr strany čtverce k jeho úhlopříčce, tedy $a : a\sqrt{2}$, což je přibližně $1 : 1,41$. Vyjádření zlatého řezu je znázorněno pomocí úsečky rozdělené na větší část m (maior) a menší n (minor) způsobem, že platí vztah $n : m = m : (n + m)$. Číselné vyjádření zlatého poměru není pro účely malířství nezbytné, důležité však je, aby se umělec dokázal k jeho hodnotě přiblížit pouhým odhadem. Různým použitím zlatého řezu pro výšku i šířku rámce vznikají různé formáty. Jedním z příkladů je *marína*, protáhlý formát používaný při zobrazování moře, jehož strany jsou v poměru $n : m$.

Výběr vhodného umístění obrazových prvků do formátu může být pro začátečníka poměrně složitou záležitostí. Jednou z počátečních chyb bývá umístění hlavního bodu obrazu do osy obrazu, což často není esteticky nejvhodnějším řešením. U vyzrálých umělců najdeme mnohem elegantnější řešení kompozičního schématu. V díle Adolfa Kosárka - *Česká krajina* - je délka



Obrázek 7.6: Vitruvius [1]

i výška obrazu rozdělena svislou a vodorovnou linií v poměru brány harmonie tak, že svislá linie prochází kmenem stromu a vodorovná kopíruje horizont krajiny (obr. 7.5(a)). V díle Bohumila Kubišty - *Žně* - najdeme zase zlatý řez. Horizont krajiny je umístěn ve zlatém řezu výšky formátu a stejným způsobem je umístěna i osa stodoly, která rozděluje šířku formátu opět ve zlatém řezu (obr. 7.5(b)).

7.2.2 Významní umělci a jejich díla

Před příchodem renesance byl znám zlatý řez pouze pod pojmem *krajní a střední poměr*, jak ho definoval Eukleides ve své knize „Základy“. To se dramaticky změnilo po vydání knihy Lucy Pacioliho „Divina Proportione“ (Božská proporce).

Luca Pacioli, františkánský mnich, se zpočátku věnoval malířství, postupem času však v sobě objevil matematické nadání, které předurčilo jeho další cestu. Na dvoře milánského vévody Ludovica Sforzy se scházeli největší umělci a učenci té doby, mezi nimi také dvorní malíř a inženýr Leonardo da Vinci a také Pacioli jako učitel matematiky. Při pobytu v Miláně dokončil Pacioli svůj třísvazkový traktát „Divina Proportione“, který poprvé vyšel v Benátkách v roce 1509. Tato kniha představovala ucelené shrnutí poznatků týkajících se vlastností zlatého řezu, Platónských těles, dalších mnohostěnů a významu proporcí a díky ní získali mnozí umělci přístup ke znalostem o zlatém řezu a mohli ho nyní použít ve svých dílech. S dílem Lucy Pacioliho je spojena ještě jedna významná osobnost a tou není nikdo jiný než velký renesanční malíř, vynálezce a matematik v jedné osobě Leonardo da Vinci.

Text „Divina Proportione“ je doplněn o 60 ilustrací mnohostěnů v různém provedení, jejichž

autorem je právě zmíněný umělec. Leonardo da Vinci je jedním z malířů, v jejichž dílech se údajně vyskytuje zlatý řez. V této souvislosti je obvykle zmiňováno pět Leonardových děl - Svatý Jeroným, dvě verze Madony ve skalách, studie proporcí tváře a slavná Mona Lisa, kolem jejíž tváře lze údajně sestrojit zlatý obdélník. Jak uvádí Livio [15], poměry u obou obrazů Madony ve skalách se výrazně blíží hodnotě 1,6, která je sice blízko hodnotě zlatého řezu, ale jeho použití to přímo nedokazuje. V obraze Svatého Jeronýma můžeme podle některých teorií kolem okrajů jeho těla obkreslit zlatý obdélník. Jeho strany však nekopírují přesně okraje postavy, pravá ruka navíc naprosto vybočuje mimo daný obdélník. Jak je zřejmé z mnoha studií lidských postav, Leonardo se velmi zajímal o lidské proporce. Jednou z jeho nejznámějších kreseb je Vitruviův muž, systém propojení geometrie a lidských proporcí, který poprvé popsal římský architekt Vitruvius (obr. 7.6).

Vitruviův muž je znázorněn v podobě postavy ve dvou pozicích, kdy jedné pozici je opsán čtverec a druhé kružnice se středem v pupku. Dalším důkazem Leonardova zájmu o lidské proporce je studie proporcí tváře (obr. 7.7), která byla nalezena v jeho zápisníku. Tvář starce je rozdělena mřížkou v několik různých obdélníků, z nichž jeden umístěný vlevo uprostřed se velmi podobá zlatému obdélníku. Jeho linie jsou však načrtnuty příliš hrubě, nelze tedy s jistotou tvrdit, že se skutečně jedná o zlatý obdélník.



Obrázek 7.7: Studie proporcí tváře [1]

Další známou osobností často spojovanou se zlatým řezem je německý malíř Albrecht Dürer. Ve svém čtyřsvazkovém díle „Pojednání o měření s kružítkem a pravítkem“ uvádí popis konstrukce logaritmické spirály, různých mnohoúhelníků včetně konstrukce pětiúhelníku a také popis platónských těles a dalších mnohostěnů. Ve své knize Dürer znázornil i jedny z prvních

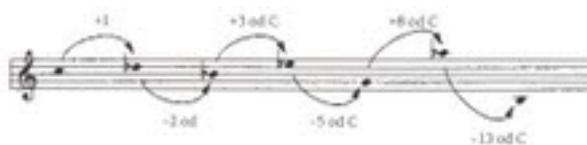
mnohostěnových sítí, které zobrazeny na papíře můžeme vystříhat a složit v určené těleso.

7.3 Hudba

V publikaci „Zlatý řez“ M. Livia [15] nalezneme zajímavé informace o hudbě ve spojení se zlatým číslem. Stejně jako matematika nebo fyzika má své vzorce a poučky, najdeme i v hudbě určitá pravidla, podle nichž se je nutno se řídit. Při náhodném výběru dvou tónů, nám jejich souzvuk zní obvykle nelibozvučně (disonantně). Důvodem je to, že jen malé procento kombinací tónů vytváří zvuky, které jsou našemu uchu příjemné (konsonantní). Této skutečnosti si všiml již Pythagoras, když zkoumal vztah mezi určitými poměry délek jinak stejných strun. Při svém bádání zjistil, že libé zvuky vznikají, pokud jsou délky strun rozděleny v poměru celých čísel. Při celočíselném dělení vznikají známé intervaly jako například prima (1 : 1), kvarta (3 : 4), kvinta (2 : 3) nebo oktáva (1 : 2).

Další propojení hudby a matematiky představuje zlatý řez. Podle některých teorií ho můžeme najít v dílech W. A. Mozarta či C. Debussyho, důkladné průzkumy děl těchto umělců však tyto teorie nepotvrdily. Spory o využívání zlatého řezu se vedou i u maďarského pianisty Bély Bartóka, který propojoval klasickou hudbu s lidovými prvky. Analýza jedné z Bartókových fugových vět ukazuje, že věta skládající se z 89 taktů je rozdělena nejhlasilitějším momentem skladby na dvě části o počtu taktů 55 a 34, jež jsou děleny na další části tak, že počty taktů všech úseků odpovídají Fibonacciho číslům. V poznámkách Bély Bartóka však nenajdeme o zlatém řezu ani zmínku, jeho použití je tedy pouhým dohadem.

Umělcem, u kterého si můžeme být jisti, že zlatý řez ve své hudbě skutečně používal, byl skladatel, matematik a učitel Joseph Schilinger (1895-1943). K jeho žákům patřili slavní muzikanti George Gershwin, Benny Goodman nebo Glen Miller. Své matematické vnímání vyjádřil Schilinger pomocí systému hudební skladby založené na melodii tvořené notami, jejichž půltónová vzdálenost byla založena na Fibonacciho číslech (obr. 7.8). U většiny skladatelů je použití zlatého řezu však velice spekulativní.



Obrázek 7.8: Melodie založená na intervalech odpovídajících Fibonacciho číslům [15]



(a)



(b)

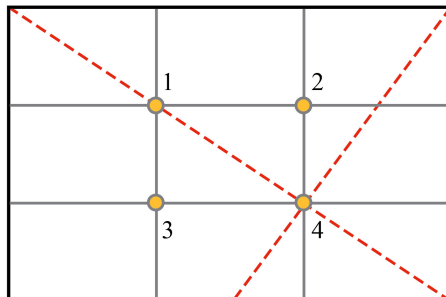
Obrázek 7.9: Výběr kompozice při fotografování

7.4 Grafické umění

Zlatý řez je velmi populární i v designové tvorbě, najdeme ho například ve formátu webových stránek nebo v typografii zabývající se vhodným umístěním písma. Chceme-li na stránce něčím zaujmout, musíme vybrat takové místo, které je pro oko nejzajímavější. Tímto místem obvykle bývá optický střed stránky odpovídající umístění zlatého řezu. Další oblastí designové tvorby, kde má zlatý řez své místo, je výroba šperků. Existuje mnoho ozdob a přívěsků inspirovaných zlatou spirálou, která se v designu velmi často využívá pro svůj podmanivý tvar. Výrobě šperků se věnuje pouze několik designerů, většina z nás však zlatý řez také, a to při fotografování.

Jak píše Tomáš Slavíček ve svém článku „Zlatý řez ve fotografii“ [19], přemýšlíme při tvorbě fotografie často nad vhodnou kompozicí, aby náš výsledek působil tím nejlepším dojmem. Jak jsme se zmínili v tématu kompozice v malířství, častou chybou začátečníků bývá umístění hlavního objektu do centra obrazu. Tato středová kompozice má sice určité výhody, většinou však působí nezájímavým dojmem a její přílišná souměrnost může připadat oku nudná (obr. 7.9(a)). Vhodnějším řešením je vybrat takové umístění, kdy se předmět nachází ve zlatém řezu obrazu (obr. 7.9(b)). Otázkou je, jak zlatý řez v hledáčku fotoaparátu najít. V praxi k hledání zlatého řezu nemůžeme použít geometrické pomůcky, musíme tedy najít jiný způsob, jakým lze tento poměr vyjádřit. Nejsnazší metodou hledání zlatého řezu je rozdělit pomocí úseček výšku i šířku fotografie na třetiny (obr. 7.10). Jako průsečíky úseček nám vzniknou čtyři body označující přibližně umístění zlatého řezu, ze kterých si můžeme libovolně vybrat, kam svůj sledovaný předmět umístíme. Při tomto výběru nám mohou být užitečné následující informace. Formát fotografie, stejně jako mnoho jiných objektů, se kterými se denně setkáváme, má tvar obdélníku. Když si prohlížíme fotografii, postupujeme stejně jako u knihy - zleva doprava,

shora dolů. Pozorovatel tedy postupuje fotografií ve směru $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Posledním bodem jeho zájmu je tedy bod číslo 4, kterému je věnována nejdelší pozornost, je proto nejvhodnějším místem, pro umístění sledovaného předmětu.



Obrázek 7.10: Pravidlo třetin [19]

Kapitola 8

Závěr

Zlatý řez je pojem známý nejen v rámci matematiky, ale i v jiných oborech. Tento ideální poměr krásy a harmonie můžeme najít všude kolem nás, mnozí však o jeho existenci nemají ani potuchy, neboť osnovy základního ani středního školství tento pojem zpravidla neobsahují. Hlavním cílem této bakalářské práce bylo tento zajímavý poměr přiblížit, ukázat jeho matematickou podstatu a výskyt v rozmanitých sférách.

Prvotním úkolem práce bylo podat ucelený přehled o dostupné literatuře týkající se zlatého řezu a Fibonacciho posloupnosti. Jednotlivé publikace, se kterými jsem pracovala, pocházely z různých oborů (architektura, matematika, přírodověda), neboť zlatý řez najdeme všude tam, kde hraje roli estetika. Velmi zajímavé bylo sledovat, jak se jednotlivé názory na určitá tvrzení o výskytu zlatého řezu, u různých autorů liší. Ve starších publikacích je uveden jako vzorový příklad využití zlatého čísla v architektuře řecký chrám Parthenón, jehož obrysu můžeme opsat zlatý obdélník. V jiné publikaci novějšího data však panují o tomto tvrzení značné pochybnosti. Podobné rozpory najdeme i v názorech na přítomnost zlatého řezu v dílech známých umělců.

Jak bylo řečeno, v umění můžeme o užití zlatého řezu často pouze spekulovat. Existuje však jedna oblast, ve které se všichni autoři na přítomnosti zlatého řezu shodují, a tou je příroda. Tomuto tématu jsem se snažila ve své bakalářské práci věnovat dostatek prostoru, neboť princip, jakým příroda zašifrovala tento poměr krásy a harmonie do nesčetného množství různých podob včetně nás samotných, mě naprosto fascinoval.

Mým osobním cílem v této práci je, aby si každý, komu se tato práce dostane do rukou, uvědomil, že podstatou mnohých krás přírody, kterým se denně obdivujeme, je prostá matematická rovnice skrývající však nesmírný poklad.

A tím je zlatý řez!

Literatura

- [1] Antoccia, L.: *Leonardo, umělec a vědec*. Praha: Knižní klub, první vydání, 2006, ISBN 80-242-1591-8.
- [2] Bangs, H.: *Návrat posvátné architektury: zlatý řez a konec modernismu*. Praha: Levné knihy, první vydání, 2008, ISBN 978-80-7309-571-0.
- [3] Beutelspacher, A.: *Matematika do vesty*. Praha: Baronet, první vydání, 2005, ISBN 80-7214-841-9.
- [4] Bečvář, J.: *Matematika ve střední Evropě*. Praha: Prometheus, první vydání, 2001, ISBN 80-7196-232-5.
- [5] Chmelíková, V.: *Zlatý řez nejen v matematice*. Praha: matfyzpress, první vydání, 2009, ISBN 978-80-7378-078-4.
- [6] Crhák, F.; Kostka, Z.: *Výtvarná geometrie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, páté vydání, 1987, ISBN 14-300-85.
- [7] Hron, J.: *Jak namalovat krajinu*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, druhé vydání, 1989, ISBN 14-459-89.
- [8] Jirovská, I.: *Matematická stránka problému* [online]. 1995, [cit. 2010-01-03].
URL <<http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka3.html>>
- [9] Jirovská, I.: *Pět Platónských těles* [online]. 1995, [cit. 2010-02-05].
URL <<http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka4.html>>
- [10] Jirovská, I.: *Užití zlatého řezu v biologii* [online]. 1995, [cit. 2010-02-08].
URL <<http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka6.html>>
- [11] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, první vydání, 1978.

- [12] Knott, R.: *Fibonacci Numbers and Nature* [online]. 1996, [cit. 2010-02-05].
URL <<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>>
- [13] Knott, R.: *The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers* [online]. 1996, [cit. 2010-02-14].
URL <<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html#fibpythags>>
- [14] Kowal, S.: *Matematika pro volné chvíle: (zábavou k vědě)*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, třetí vydání, 1986, ISBN 04-008-86.
- [15] Livio, M.: *Zlatý řez*. Praha: Dokořán, první vydání, 2006, ISBN 80-7363-064-8.
- [16] Lyon, J.: *Fibonacci numbers and design* [online]. 2009, [cit. 2010-04-15].
URL <<http://www.zinn-x.com/fibonacci.php>>
- [17] Olsen, S.: *Záhadný zlatý řez*. Praha: Dokořán, první vydání, 2009, ISBN 80-7066-358-8.
- [18] Opava, Z.: *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros, první vydání, 1989, ISBN 13-781-89.
- [19] Slaviček, T.: *Zlatý řez ve fotografii* [online]. 2005, [cit. 2010-2-25].
URL <<http://digiarena.zive.cz/default.aspx?article=2477>>
- [20] Slavíková, Z.: *Morfologie rostlin*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, druhé vydání, 1990, ISBN 80-7066-358-8.
- [21] Vincent, R.: *Geometry of the golden section*. Marseille: Chalagam Publishing, druhé vydání, 2007, ISBN 2-950 80001-2-2.
- [22] Vorobjev, N. N.: *Fibonacciho čísla*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, první vydání, 1953.
- [23] Walser, H.: *The Golden Section*. Washington, DC: The mathematical association of America, první vydání, 2006, ISBN 0-88385-534-8.
- [24] Wikipedia: *Platónské těleso* [online]. 2010, [cit. 2010-01-02].
URL <http://cs.wikipedia.org/wiki/Platónské_těleso>
- [25] WorldMysteries: *Fibonacci Numbers in Nature and the Golden Ratio* [online]. 2009, [cit. 2010-03-04].
URL <http://www.world-mysteries.com/sci_17.htm>

[26] Yahoo: *flickr* [online]. 2010, [cit. 2010-04-15].

URL <<http://farm4.static.flickr.com/>>

[27] Štefan Znam: *Pohl'ad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, prvné vydání, 1986.